

मिडिल स्कूलों के लिए

गणित

पुस्तक II भाग I

कक्षा VII के लिए पाठ्य-पुस्तक

मनमोहन सिंह अरोरा

इन्दर बीर सिंह पासरी

विद्यया ऽ मृतमश्नुते



एन सी ई आर टी
NCERT

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL
RESEARCH AND TRAINING

प्रथम संस्करण

जून 1978

माघ 1900

पुनर्मुद्रण

मार्च 1980

चैत्र 1902

जून 1981

ज्येष्ठ 1903,

मार्च 1983

चैत्र 1905

PD 12 T—SD

© राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, 1978

मुख्य पृष्ठ चित्र : सी० पी० टंडन

मुख्य पृष्ठ पर संस्कृत में लिखावट : हरि प्रकाश त्यागी

मूल्य रु० 4.80

प्रकाशन विभाग से बिनोद कुमार पंडित, सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्,
राष्ट्रीय शिक्षा संस्थान भवन, श्री परबिन्द मार्ग, नई दिल्ली 110016 द्वारा प्रकाशित तथा
राजबन्धु इण्डस्ट्रियल कम्पनी, सी-61 मायापुरी, नई दिल्ली 110064 द्वारा मुद्रित ।

प्राक्कथन

यह पुस्तक "मिडिल स्कूलों के लिए गणित" पुस्तक-माला के अन्तर्गत दूसरी पुस्तक का भाग I है। हमें ओ समालोचनाएँ प्राप्त हुई हैं उनसे प्रमाणित होता है कि राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् द्वारा 1977 में निर्मित पुस्तक 1 का उसके प्रयोग करने वालों ने बहुत अच्छी प्रकार से स्वागत किया है। अतः प्रस्तुत पुस्तक का भी उसी आधार पर निर्माण किया गया है। इसमें जो गणित है वह न तो "आधुनिक" है और न ही "परम्परागत", बल्कि यह है हमारे देश की वर्तमान आवश्यकताओं के अनुरूप एक सरल, सुन्दर और मुरूप गणित। इस पुस्तक-माला में मूलभूत संकल्पनाओं के अपेक्षित ज्ञान के साथ ही अभिगणनात्मक पक्ष का भी जिसको कि तथाकथित "आधुनिक गणित" के काल में लगभग बाहर निकाल दिया गया था, पुनर्नवीकरण किया गया है। अतः इस पुस्तक में विद्यार्थी की अभिगणनात्मक क्षमता को दृष्टतम स्तर तक उठाने के लिए बहुत से प्रश्नों के अतिरिक्त वास्तविक जीवन की स्थितियों और अन्य विषयों में गणित के अनुप्रयोगों को प्रचुर मात्रा में सम्मिलित किया है।

हमारे राष्ट्रीय लक्ष्यों, हमारे पर्यावरण और हमारे साधनों के अनुरूप कक्षा I (आयु 6+) से कक्षा XII (आयु 18+) तक के भारतीय विद्यार्थियों की आवश्यकताओं के अनुकूल गणित की इस पुस्तक-माला को विकसित करने में परिषद् डा० मनमोहन सिंह अरोरा की कल्पना-दृष्टि की बहुत प्रशंसा करती है। इस कल्पना-दृष्टि ने एक ओर तो गणित के शिक्षकों और विशेषज्ञों का अनुमोदन प्राप्त किया तथा दूसरी ओर व्यापक रूप से पूरे शैक्षिक-समुदाय का भी समर्थन प्राप्त किया।

इस पुस्तक का प्रथम प्रारूप कुरुक्षेत्र विश्वविद्यालय में गणित के प्रोफेसर, प्रो० आई० बी० एस० पासी ने प्रो० मनमोहन सिंह अरोरा के सहयोग से तैयार किया। परिषद् के विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग के श्री जी० डी० ढल और डा० राम भवतार ने आवश्यक सहायता प्रदान की। इस प्रारूप का प्रो० एस० डी० चोपड़ा, कुरुक्षेत्र विश्वविद्यालय के गणित विभाग के वरिष्ठ प्रोफेसर और अध्यक्ष (अवकाश प्राप्त) और परिषद् के डा० एस० के० सिंह गौतम के साथ विवेचन किया गया। विचार विमर्श से जो विचार सामने आए

प्रथम संस्करण

मूल 1978

आवृत्ति 1980

पुनर्मुद्रण

मार्च 1980

मई 1982

मूल 1981 ..

जुलाई 1983

मार्च 1983

मई 1985

PD 12 T-SD

② राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, 1978

मुख्य पृष्ठ विषय सी० पी० टंकन

मुख्य पृष्ठ पर संस्कृत में लिखावट हरि प्रकाश त्रिपाठी

मूल्य रु० 4.80

प्रकाशन विभाग से विनोद कुमार बहित, सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, राष्ट्रीय शिक्षा अनुसंधान भवन, सी० आर० डि० मार्ग, नई दिल्ली 110016 द्वारा प्रकाशित तथा राजवन्धु इण्डस्ट्रियल कम्पनी, सी०-61 मायापुरी, नई दिल्ली 110064 द्वारा मुद्रित ।

प्राक्कथन

यह पुस्तक "मिडिल स्कूलों के लिए गणित" पुस्तक-माला के अन्तर्गत दूसरी पुस्तक का भाग I है। इमें जो समालोचनाएँ प्राप्त हुई हैं उनसे प्रमाणित होता है कि राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् द्वारा 1977 में निर्मित पुस्तक I का उसके प्रयोग करने वालों ने बहुत अच्छी प्रकार से स्वागत किया है। अतः प्रस्तुत पुस्तक का भी उसी आधार पर निर्माण किया गया है। इसमें जो गणित है वह न तो "आधुनिक" है और न ही "परम्परागत", बल्कि यह है हमारे देश की वर्तमान आवश्यकताओं के अनुरूप एक सरल, सुन्दर और सुस्पष्ट गणित। इस पुस्तक-माला में मूलभूत संकल्पनाओं के अपेक्षित ज्ञान के साथ ही अभिगणनारमक पक्ष का भी जिसको कि तथाकथित "आधुनिक गणित" के काल में लगभग बाहर निकाल दिया गया था, पुनर्नीकीकरण किया गया है। अतः इस पुस्तक में विद्यार्थी की अभिगणनारमक समझ को इष्टतम स्तर तक उठाने के लिए बहुत से प्रदनों के अतिरिक्त वास्तविक जीवन की स्थितियों और अन्य विषयों में गणित के अनुप्रयोगों को प्रचुर मात्रा में सम्मिलित किया है।

हमारे राष्ट्रीय लक्ष्यों, हमारे पर्यावरण और हमारे माधनों के अनुरूप कक्षा I (आयु 6+) से कक्षा XII (आयु 18+) तक के भारतीय विद्यार्थियों की आवश्यकताओं के अनुकूल गणित की इस पुस्तक-माला को विकसित करने में परिषद् डा० मनमोहन सिंह अरोरा की कल्पना-दृष्टि की बहुत प्रशंसा करती है। इस कल्पना-दृष्टि ने एक ओर तो गणित के शिक्षकों और विषयज्ञों का अनुमोदन प्राप्त किया तथा दूसरी ओर व्यापक रूप से पूरे शैक्षिक समुदाय का भी समर्थन प्राप्त किया।

इस पुस्तक का प्रथम प्रारूप कुरुक्षेत्र विश्वविद्यालय में गणित के प्रोफेसर, प्रो० आई० बी० एस० पासी ने प्रो० मनमोहन सिंह अरोरा के सहयोग से तैयार किया। परिषद् के विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग के श्री जी० डी० दल और डा० राम प्रवन्शर ने आवश्यक सहायता प्रदान की। इस प्रारूप का प्रो० एस० डी० चोपड़ा, कुरुक्षेत्र विश्वविद्यालय के गणित विभाग के बरिष्ठ प्रोफेसर और अध्यक्ष (अवकाश प्राप्त) और परिषद् के डा० एस० के० सिंह गौतम के साथ विवेचन किया गया। विचार विमर्श से जो विचार सामने आए

उनकी दृष्टि में हा० प्र० का प्रयोग करना, मनमोहन मिश्र अरोरा ने सजीवित किया। हा० प्र० पी० गुप्ता और डा० एम० के० मिश्र मौलम ने इस कार्य में उनकी सहायता की। प्रत्येक-वर्ष का भी इस प्रकार का तैयार करने में, मैं इनमें से प्रत्येक का, उनके अधिक परिश्रम के लिए आभार व्यक्त करता हूँ।

परिषद ने सर्वप्रथम प्रयत्न किया है कि अपने सामयिक विकास कार्य में पाठ्यमायिक शिक्षकों, राज्य शिक्षा मन्त्रालो एवं राज्य विज्ञान शिक्षा मन्त्रालो के प्रतिनिधियों को सम्मिलित किया जाए ताकि शिक्षकों और विद्यार्थियों के हाथ में व्यावसायिक अच्छी से अच्छी सामग्री दी जा सके। अतः इस पुस्तक के द्वितीय प्राकरण को करवरी और मार्च 1978 में राष्ट्रीय शिक्षा मन्त्रालय में आयोजित बैठकी में शिक्षकों, शिक्षक परिषदों और विषय-विशेषज्ञों के एक-दूसरे को दिखाया गया।

अंतिम लेखन और विषय-समाधान का कार्य पुनः पी० मनमोहन मिश्र अरोरा ने सम्भाला। हा० प्र० पी० गुप्ता और डा० एम० के० मिश्र मौलम ने उनकी सहायता की। हा० एम० के० मिश्र मौलम और श्री ईश्वर चन्द्र ने प्रश्नों के उत्तर तैयार किए। हिन्दी सरकार का विषय-समाधान श्री महेश्वर शर्मा ने हा० के० सी० मदान और श्री रंजित चन्द्र की सहायता में किया। मैं इनमें से प्रत्येक का कृतज्ञता, विशेष रूप से पी० मनमोहन मिश्र अरोरा का जिन्होंने प्रसन्नतापूर्वक इस कार्य को अपने हाथ में लिया और अपनी आत्यधिक व्यस्तता के होते हुए भी इनमें कम समय में इसे पूरा किया।

निस्सन्देह, किसी भी पुस्तक की उपयोगिता का अंतिम निर्णायक तो उसके प्रयोग करने वाले अर्थात् विद्यार्थियों और शिक्षकों का समूह है। परिषद उनके विचारों का कृतज्ञता पूर्वक स्वागत करेगी ताकि पुस्तक के अन्तर्गत व्यवस्था में सम्भवतया और अधिक सुधार किया जा सके।

शिवा कुमार मिश्र

निदेशक

राष्ट्रीय शिक्षा मन्त्रालय और परीक्षा परिषद्

प्रस्तावना

कक्षा VII के लिए "मिडल स्कूलों के लिए गणित" पुस्तक-माला की दूसरी पुस्तक के भाग I को पाठकों के हाथों सौंपते हुए मुझे प्रसन्नता हो रही है। इसमें जो कुछ दिया है वह सामान्यतया बीजगणित विषय शीर्षक के अंतर्गत पढ़ाया जाता है। यह बांछनीय है कि शिक्षक क्यामिली, व्यावसायिक गणित और सांख्यिकी पर आने से पहले, जो कि दूसरी पुस्तक के भाग II की विषय-सामग्री है, भाग I पढ़ाएँ।

असमय पिछले दस वर्षों से, जब से कि हमारे देश में तथा कथित "आधुनिक" गणित का मूलपाठ हुआ, विद्यमान परिस्थितियों में उसकी उपयोगिता और विद्यार्थियों में उसके प्रति अभिप्रेरणा के बारे में चिन्ता बढ़ती जा रही है। सामग्री को पढ़ाने में शिक्षकों की कठिनाइयों का सामना करना पड़ा, विद्यार्थियों की संकल्पनाएँ समझने में कठिनाई हुई तथा अभिभावकों ने, इच्छा होते हुए भी, गणित के अध्ययन में अपने बच्चों की सहायता करने में अपने को असमर्थ पाया।

अतः राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् को गणित के पाठ्य-क्रम में विद्युत सशोधन करने का कार्य अपने हाथ में लेना पड़ा। इस कार्य में जो केवल एक मार्ग दर्शक उद्देश्य था वह यह था कि हम बच्चे को किसी स्तर पर जो गणित पढ़ाते हैं उसे न केवल सरलता से उसके समझने योग्य होना चाहिए बल्कि उसको उसके वातावरण से भी यथा सम्भव सम्बन्धित होना चाहिए। इसके साथ ही, हमारे विकास के लक्ष्यों और हमारे उपलब्ध साधनों के परिप्रेक्ष्य में इसे हमारे समाज की आवश्यकताओं के अनुकूल भी होना चाहिए।

इस पुस्तक की कुछ विशेषताएँ, जो कि पुस्तक-माला की पहली पुस्तक में भी थी, नीचे दी जा रही हैं :

- (i) किसी संकल्पना को प्रविष्ट करने से पहले बच्चे को अभिप्रेरित करने के लिए उपयुक्त उदाहरण दिए गए हैं ;
- (ii) भाषा सरल और रोचक है। 12+ से 13+ की आयु के बच्चे की शब्दावली को ध्यान में रखा गया है ;

- (iii) समुचित हल किए हुए प्रश्नों के माध्यम प्रत्येक भाषा में दिए गए हैं ताकि विद्यार्थी सकल्पना के अनुप्रयोग से अभिव्यक्ति न कर सकें।
- (iv) जहाँ तक हो सका है, अनावश्यक प्राथमिक शब्दावली और निपटारों को छोड़ दिया गया है।
- (v) पुस्तक को सारे एककी में विभाजित किया गया है। प्रत्येक एकक के प्रारम्भ में यह बताया गया है कि इस एकक में क्या है तथा प्रत्येक एकक के अन्त में मुख्य सकल्पनाओं की एक सूची दी गई है ताकि विद्यार्थी गहन ध्यान स्मरण कर सकें कि एक विशेष एकक में उसने क्या पढ़ा है।
- (vi) प्रत्येक एकक में जो प्रश्नावलियाँ दी गई हैं वे इस अभिप्राय से दी गई हैं कि शिक्षकों को तुरन्त सबसे प्रश्नों का एक बँक प्राप्त हो जाए ताकि वे विभिन्न योग्यता-स्तर के विद्यार्थियों की आवश्यकताओं को ध्यान में पूर्ण कर सकें।
- (vii) उपयुक्त स्थानों पर विविध प्रश्नावलियों को सम्मिलित किया गया है ताकि विद्यार्थी नामची का आकस्मिक पुनरावलोकन कर सकें।
- (viii) कठिन प्रश्न और अनुच्छेद तारांकित किये गए हैं।
- (x) विभिन्न स्थानों पर "क्यों?" लगा दिया गया है ताकि विद्यार्थी को अपने विचार सुद्ध बनाने में सहायता मिल सके। अतः शिक्षक से यह आशा की जाती है कि वह स्वयं इनके उत्तर देने के बरत विद्यार्थी को इनके उत्तर देने के लिए प्रेरित करें।
- (x) विविध प्रश्नावलियों के सिवाय प्रत्येक प्रश्नावली में प्रश्न सरलता से कठिनता के क्रम में दिये गए हैं।

विद्यार्थियों के लिए दो सख

आप नमिक्त की इस पुस्तक का पढ़ने जा रहे हैं। यदि आप प्रारम्भ में ही सीखने की कुछ 'अच्छी' आदने डाल ले तो आप नमिक्त के अधयन का आकषक और अधिक सार्थक पाएँगे। सीखने की कुछ 'अच्छी' आदने नीचे सुझाई गई हैं :

1. नमिक्त केवल कार्य करने से सीखा जाता है। केवल अपनी पाठ्य पुस्तक को ही न पढ़ें। आपको अपने पास सदैव एक पेसिन और कागज रखना चाहिए और पुस्तक के अनुसार 'कार्य' करना चाहिए।

2. पुस्तक में जो आपको “क्या ?” मिले, आपको उसका उत्तर प्रदान करने का प्रयत्न करना चाहिए ।
3. किसी विशेष प्रश्न पर अधिक समय कमी न लगाए । अच्छा तो यह है कि आप अगले प्रश्न पर चले जाएँ तथा कुछ समय बाद ताजे दिमाग से उस पुराने प्रश्न पर वापिस आएँ जो आपको कठिन लग रहा था ।
4. मनुष्य के मस्तिष्क रूपी भंडार में केवल सीमित सूचनाएँ ही रखन की क्षमता है । जिसका प्रायः प्रयोग नहीं होता उसे भंडार से निकाल दिया जाता है । इसलिए यह अच्छा होगा कि आप प्रत्येक एकक में मूलभूत परिणामों का एक सारांश बना लें तथा समय समय पर इनका पुनरावलोकन करें ।

मैं और प्रो० ईश्वर बीर सिंह पासी दोनों ही कुलक्षेत्र विश्वविद्यालय में गणित विभाग के वरिष्ठ प्रोफेसर और अध्यक्ष प्रो० एस० डी० चोपड़ा (अवकाश प्राप्त) के, उनके द्वारा पुस्तक के विभिन्न स्थानों पर दिए गए बहुमूल्य सुझावों के लिए, आभारी हूँ । परिषद् में विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग के मेरे साथियों ने प्रत्येक स्तर पर मुझे अपना अपरिमित सहयोग दिया । मैं इनमें से प्रत्येक का और सबका बहुत कृतज्ञ हूँ । विशेष रूप से डा० आर पी० गुप्ता और डा० एस० के० सिंह गौतम द्वारा मुझे पांडुलिपि के संपादन में दी गई सहायता, डा० एस० के० सिंह गौतम और श्री ईश्वर चन्द्र द्वारा प्रश्नों के दिए गए उत्तर तथा श्री महेन्द्र शंकर द्वारा डा० के० सी० मदान और श्री ईश्वर चन्द्र की सहायता से हिन्दी संस्करण के लिए गए संपादन का जल्द किया जा सकता है । मैं उन शिक्षकों का भी बहुत आभारी हूँ जिन्होंने इस पुस्तक की सामग्री की समीक्षा करने में अपना समय दिया और इसमें सुधार हेतु बहुमूल्य सुझाव दिए । हो सकता है कि हमारे भरसक प्रयत्नों के बावजूद कुछ अनचाही त्रुटियाँ रह गई हों । इनमें से कोई भी त्रुटि बताए जाने पर परिषद् प्रसन्नता पूर्वक उन्हें स्वीकार करेगी और साथ ही इस पुस्तक के अगले संस्करणों में सुधार हेतु किन्हीं भी सुझावों का परिषद् स्वागत करेगी ।

कृतज्ञताज्ञापन

राष्ट्रीय वैश्विक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् निम्नलिखित व्यक्तियों की आभारी है जिन्होंने परकरी और मार्च 1978 में राष्ट्रीय शिक्षा सम्मान, नई दिल्ली में आयोजित बैठकी में इस पाठ्य पुस्तक की मूल सामग्री की समीक्षा की

1 डा० मनमोहन सिंह अरारा

राष्ट्रीय वैश्विक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली

2 डा० रामबलराम

राष्ट्रीय वैश्विक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली

3 श्री जी० आर० बख्श

12710 डा० मुकेशी नगर दिल्ली

4 प्राध्यापिका प्रवीण शर्मा

केन्द्रीय विद्यालय, ईश्वर गार्डन, नई दिल्ली

5 श्री ईश्वर चन्द्र

राष्ट्रीय वैश्विक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली

6 श्री भगवान दास

शिक्षा अधिकारी, ग्रुप XI, राजेन्द्र नगर, नई दिल्ली

7 श्री जी० डी० दल

राष्ट्रीय वैश्विक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली

8 डा० एन० के० सिंह जीरम

राष्ट्रीय वैश्विक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली

9. श्री पी० एन० गोयल
दिल्ली पब्लिक स्कूल, मधुगा रोड, नई दिल्ली
10. श्री एम० सी० गुप्ता
डी० ए० बी० उच्चतर माध्यमिक विद्यालय, चित्रगुप्त रोड, नई दिल्ली
11. डा० आर० पी० गुप्ता
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
12. कु० के० एम० जैन
एम० डी० जैन उच्चतर माध्यमिक बालिका विद्यालय, दिल्ली
13. श्री जे० पी० कलसल
एन० कोथं मैट्रिक स्कूल, सुबरोतो पार्क, नई दिल्ली
14. डा० (श्रीमती) जरुणा कपूर
जामिया मिलिया इस्लामिया, नई दिल्ली
15. श्री आर० एस० कोठारी
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
16. डा० रवीन्द्र कुमार
रामजस कॉलेज, दिल्ली
17. डा० के० सी० मदान
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
18. श्रीमती कचन मानकातला
गार्गी कॉलेज, नई दिल्ली
19. कु० ज० मनुजानी
नडी इरविन ह्यामर सैकेंडरी स्कूल, नई दिल्ली

20. कु० मरणा मजई
इन्दिरा मजिना कान्हा नई दिनी
21. कु० उमा मेडना
हिन्दी वल्लभ स्कूल, आर० के० पुरम, नई दिनी
22. श्रीमती मनाथ मेन्ड
राजकीय उच्चतर माध्यमिक बालिका विद्यालय, बालकीय नगर, नई दिनी
23. श्री उमेश नारायण
राजकीय उच्चतर माध्यमिक बालक विद्यालय, सैक्टर V, II जिरट, आर० के० पुरम, नई दिनी
24. डा० माया राम भाग
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिनी
25. कु० कमला माहली
क्रिस्टियन स्कूल, बालनगपुरी, नई दिनी
26. श्री डा० एम० नाकिर
मित्रा निदेशालय, दिनी
27. श्री महेंद्र मकर
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिनी
28. श्री आई० टी० भर्मा
केन्द्रीय विद्यालय, आई० आई० टी० कैंपस, नई दिनी
29. श्रीमती सरोज वर्मा
स्विचमेन्स स्कूल, पूसा रोड, नई दिनी

30. श्री बनबीर सिंह

राजपूताना रायफल्स हीरोज मेमोरियल हायर सेकेन्डरी स्कूल, दि. ला. कैन्ट

31. श्री बनदेव सिंह

राज्य शिक्षा संस्थान, दिल्ली

32. श्री सज्जन सिंह

राजकीय उच्चतर माध्यमिक बालक विद्यालय, सेक्टर XXII, आर० के० पुरम, नई दिल्ली

33. श्रीमती कुशम भूष

केन्द्रीय विद्यालय, एम्बेड्ज गंज, नई दिल्ली

34. श्री यश पाल वर्मा

नवयुग स्कूल, सरोजिनी नगर, नई दिल्ली

पुस्तक में प्रयुक्त गणित के संकेत

योग

व्यकृत्य

गुणन

विभाजन

के समान है

: से छोटा है

से बड़ा है

से छोटा है या के समान है

से बड़ा है या के समान है

निरपेक्ष मान

विषय-सूची

प्राक्कथन	iii
प्रस्तावना	v
कृतज्ञताज्ञापन	viii
पुस्तक में प्रयुक्त गणित के संकेत	xii
एकक	
I परिमेय संख्याएँ	1
1.1 भूमिका	1
1.2 परिमेय संख्याओं की आवश्यकता	2
1.3 एक रेखाखंड को दो हुई संख्या के समान रेखाखंडों में विभाजित करना	7
1.4 परिमेय संख्याओं का संख्या रेखा पर निरूपण	9
II परिमेय संख्याओं का योग एवं व्यवकलन	14
2.1 भूमिका	14
2.2 घनात्मक और ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ	18
2.3 परिमेय संख्याओं का योग	20
2.4 परिमेय संख्या का ऋणात्मक	33
2.5 परिमेय संख्याओं का व्यवकलन	34
III परिमेय संख्याओं का गुणन एवं विभाजन	38
3.1 परिमेय संख्याओं का गुणन •	38
3.2 परिमेय संख्याओं के लिए वितरण गुण	46
3.3 परिमेय संख्या का व्युत्क्रम	50

34	परिमेय मर्यादा का विभाजन	52
35	परिमेय मर्यादा में दशमन्त्र	56
36	निरपेक्ष मान	59
37	परिमेय मर्यादा का एक मर्यादपूर्ण मान	61
IV	दशमन्त्रों का चकणित	70
V	परिमेय मर्यादाओं का दशमन्त्र निरूपण	75
51	धनात्मक परिमेय मर्यादाओं का दशमन्त्र निरूपण	75
*52	नम्बी विभाजन विधि का 'क्यों'	79
53	मान अथवा अमान आवर्तों दशमन्त्र	86
54	धनात्मक परिमेय मर्यादाओं के दशमन्त्र निरूपण	89
55	मर्यादा रेखा की मर्यादा या दशमन्त्र निरूपण	91
VI	परिमेय गुणांकों के बीजीय व्यञ्जक	94
61	पुनरावलोकन	94
62	परिमेय गुणांकों के बीजीय व्यञ्जक	95
63	बहुपद की घात	96
64	बहुपदों का योग और व्यवकलन	101
65	बीजीय व्यञ्जक का मान ज्ञान करना	110
66	बहुपद का मूल्य	112
VII	एक बार में प्रथम घात समीकरण	117
71	पुनरावलोकन	117
72	परिमेय गुणांकों के समीकरण	118
73	समीकरण हल करना	118
74	समस्याएँ हल करने में समीकरणों का प्रयोग	125
75	परिमेय मर्यादाओं के दशमन्त्र	131

VIII असमिकाएँ और एक चर में प्रथम घात असमीकरण	135
8.1 असमिकाएँ क्या हैं ?	135
8.2 असमिकाओं के गुण	136
8.3 असमीकरण	144
8.4 असमीकरण का हल करना	146
IX घातांक	169
9.1 भूमिका	169
9.2 घातांकों के नियम	172
9.3 घातांकीय संकेतन का उपयोग	185
X विशेष गुणनफल और गुणनखंडन	187
10.1 पुनरावलोकन	187
10.2 एकपदी और बहुपद का गुणन	189
10.3 विशेष गुणनफल	191
10.4 गुणनखंडन	198
XI सूत्र और उनके उपयोग	210
11.1 भूमिका	210
11.2 तापमान को °C से °F में बदलना	211
11.3 एक स्थिर चाल से गतिमान वस्तु द्वारा तय की गई दूरी	213
11.4 कुछ और सूत्र	215
*परेशिष्ट I	219
उत्तरमाला	221
पारिभाषिक शब्दावली	238

परिमेय संख्याएँ

आप धनपूर्णांकों, पूर्ण संख्याओं एवं पूर्णांकों से पहले से ही परिचित हैं। आप जानते हैं कि इनको किस प्रकार जोड़ा, घटाया, गुणा तथा भाग किया जाता है। इस एकक में हम नई संख्याओं अर्थात् परिमेय संख्याओं (rational numbers) की 'खोज' की आवश्यकता पर प्रकाश डालेंगे तथा सीखेंगे कि इन ही संख्या रेखा पर किस प्रकार निरूपित किया जाता है।

1.1 भूमिका

एक परिवार में 4 सदस्य—पिता, माता, एक पुत्र तथा एक पुत्री हैं। एक शाम को पिता 1 दर्जन (अर्थात् 12) संतरे लेकर घर आता है। वह ईमानदारी के साथ, स्वयं को भी सम्मिलित करते हुए, प्रत्येक को बराबर-बराबर संतरे देना चाहता है। प्रत्येक सदस्य को कितने संतरे मिलेंगे? निस्संदेह प्रत्येक को 3 संतरे मिलेंगे।

एक दूसरी शाम को पिता को कार्यालय से लौटने में देर हो जाती है। फल-बिक्री के पाम 9 संतरे थे और इन्हें पिता घर ले आता है। वह पुनः ईमानदारी के साथ, स्वयं को भी सम्मिलित करते हुए, प्रत्येक को बराबर-बराबर संतरे देना चाहता है। प्रत्येक सदस्य को कितने संतरे मिलेंगे?

आइए, हम अन्य स्थिति पर विचार करें। एक स्कूल में एक वाद-विवाद प्रतियोगिता आयोजित की गई है और उसमें 5 वक्ता भाग ले रहे हैं। इस कार्य के लिए केवल एक घंटे का समय उपलब्ध है। यदि प्रत्येक वक्ता को समान समय दिया जाए तो प्रत्येक वक्ता को कितने घंटे मिलेंगे ?

अब हम एक और स्थिति पर विचार करने हैं। एक गाँव में, गाँव को सड़क सड़क से मिलाने वालों, 1 किलोमीटर लम्बी एक सड़क का निर्माण किया जाना है। ठकदार को केवल 30 दिन का समय दिया गया है। वह इस कार्य को 30 दिन में इस प्रकार करने की सोचता है कि प्रत्येक दिन समान कार्य हो। प्रत्येक दिन उसे कितनी सड़क का निर्माण करना चाहिए ?

हमें ज्ञान होता है कि अभी तक तीन समस्याओं का हमें ज्ञान है उनसे इन प्रश्नों के उत्तर प्राप्त करने का प्रयत्न करने हुए हम सड़क में पड़ गए हैं। ये समस्याएँ दो स्थितियों के उत्तर देने के लिए 'पर्याप्त' नहीं हैं। हम 9 सतरों को 4 स्थितियों में बराबर-बराबर नहीं बाँट सकते। हम 1 घंटे का 5 वक्ताओं में समान रूप से वितरण नहीं कर सकते। या यही, हम 1 किलोमीटर को 30 दिन में समान रूप से विभाजित नहीं कर सकते।

1.2 परिमेय संख्याओं की आवश्यकता

आइए, थोड़ी भिन्न दृष्टि से उपर्युक्त स्थितियों पर विचार करें। हम देखते हैं कि पूर्णकों में हम $9 \div 4$, $1 \div 5$, $1 \div 30$ का निर्धारण नहीं कर सकते। अब ऐसी स्थितियों के उत्तर ज्ञात करने में समर्थ होने के लिए हमें नई संख्याएँ 'खोजने' की आवश्यकता है। आइए ऐसा करें।

सतरों के उदाहरण में यह स्पष्ट है कि प्रत्येक सदस्य को 2 सतरें मिलेंगे और 1 सतरा शेष बच रहेगा। फिर इस 1 सतरा को चार बराबर भागों में काटा जाना चाहिए जिससे कि प्रत्येक सदस्य को इनमें से एक-एक भाग मिले। इस प्रकार परिवार के प्रत्येक सदस्य को दो पूरे सतरें तथा एक सतरा का

*सतरों के पत्तों में वितरण।

एक-चौथाई मिलता है। हम इसे यह कहकर व्यक्त करते हैं कि प्रत्येक मदर्य को $\frac{9}{4}$ (जिसे 'नौ-बटे-चार' या 'नौ-चौथाई' पढ़ा जाता है) संतरे मिलते हैं।

इसी प्रकार हमें प्रत्येक बक्का को एक घंटे का पाँचवा भाग (पाँचांश) देना चाहिए। हम इसे यह कह कर व्यक्त करते हैं कि प्रत्येक बक्का को $\frac{1}{5}$ घंटे मिलते हैं। अंत में, टंकेदार को प्रत्येक दिन सड़क के तीसरे भाग का निर्माण करना चाहिए। हम इसे यह कह कर व्यक्त करते हैं कि टंकेदार प्रत्येक दिन $\frac{1}{30}$ किलो-मीटर लम्बी सड़क का निर्माण करता है।

$\frac{9}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{30}$ उन 'नई' संख्याओं के उदाहरण हैं जो परिमेय संख्याएँ कहलाती हैं। परिमेय संख्याओं को भिन्न* (fractions) भी कहा जाता है।

एक परिमेय संख्या वह संख्या है जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में रखा जा सके, जहाँ p और q पूर्णांक हों तथा q शून्य नहीं हो।

टिप्पणी 1 : हमने यह प्रतिबन्ध लगाया है कि q शून्य के बराबर नहीं हो। (क्यों ?) गणित की भाषा में हम इसे $q \neq 0$ लिख कर व्यक्त करते हैं।

टिप्पणी 2 : आइए परिभाषा का अध्ययन करें। हमने कहा है कि 'वह संख्या जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में रखा जा सके, ...'। इस परिभाषा में शब्द रखा मुख्य

शब्द है। ध्यान दीजिए कि हमने यह नहीं कहा है कि $\frac{p}{q}$ के प्रकार की

* वास्तव में परिमेय संख्याएँ, परिमेय भिन्न कहलाती हैं। शब्द 'भिन्न', स्वयं में ही, बहुत व्यापक है और इसमें परिमेय भिन्न सम्मिलित होती है। परन्तु इस पुस्तक में, हम परिमेय संख्याओं को भिन्ना ही कहते रहेंगे।

अ. 1.1.1. इस संख्या शब्द तथा निशान का अर्थ निम्न में स्पष्ट हो जाना है :

उदाहरण 1. पूर्णांक 3, 2, 1, 4 इत्यादि की लीजिए। इनही क्रमशः

$\frac{3}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{1}, \frac{4}{1}$ इत्यादि लिखा जा सकता है। अर्थात् इनमें से

प्रत्येक की $\frac{p}{q}$ के रूप में रखा जा सकता है। इससे हम यह निष्कर्ष निकालते हैं

कि प्रत्येक पूर्णांक एक परिमेय संख्या है।

शब्दकोष 3 यदि हम कोई शब्दकोष (dictionary) देखें तो हमें ज्ञात होगा कि अंग्रेजी के शब्द 'rational' (परिमेय) की उत्पत्ति 'ratio' (अनुपात) शब्द से हुई है और अनुपात की संरचना से हम पहले से ही परिचित हैं।

परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ में p अंश (numerator) तथा q हर (denominator) कहलाता है।

मानवीय ज्ञान के सन्तुषों की परिमेय संख्याओं (जिन्हें वे भिन्न कहा करते थे) की आवश्यकता गणन संख्याओं तथा पूर्णांकों की आवश्यकता के काफी समय बाद प्रतीत हुई। मध्य काल में, भिन्न की प्रथम कल्पना का विकास सम्बाइयो, एजिप्ट, इत्यादि के मापन की प्रक्रियाओं के साथ हुआ। उदाहरणार्थ, बेबीलोन के निमासिमान सेक्ससिजिसेसिमल (sexagesimal) भिन्नों (हर 60 वाली भिन्नों) का विस्तृत रूप में प्रयोग किया चूँकि उनकी माप और धन-राशि 60 भागों के पदों में विभाजित किए गए थे। ऐसा प्रतीत होता है कि मिस्रवासियों के पास एकक भिन्नों (अंश 1 वाली भिन्नों) जैसे कि $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, इत्यादि के लिए संकेत थे। वे

संख्या के ऊपर संकेत  लिखकर भिन्नो को निरूपित किया करते थे। इस प्रकार

 , $\frac{1}{3}$ को निरूपित करेगा,  , $\frac{1}{10}$ को निरूपित करेगा,  ,

$\frac{1}{12}$ को निरूपित करेगा, इत्यादि। केवल एक अन्य भिन्न जिसके लिए वे संकेत रखते थे,

$\frac{2}{3}$ की। फिर भी वे अन्य बहुत सी भिन्नो से परिचित थे। उदाहरणार्थ, रोड

पंधीरम (Rhind Papyrus) में हमें इस बात का प्रमाण मिलता है कि लगभग 1700 ई० पू० में मिस्रवासी ऐसी भिन्नों का प्रयोग करते थे जिन्हें आजकल हम $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}$, इत्यादि लिखते हैं। यूनानी लोगों को भी भिन्नों के बारे में ज्ञान

था। वे हर को अंश के ऊपर लिखा करते थे तथा इसके अतिरिक्त उन्होंने भिन्नों के लिए अन्य संकेतों का भी प्रयोग किया। रोम के निवासियों ने द्वादश आधार वाली भिन्नों (duodecimal fractions) अर्थात् ऐसी भिन्नों का प्रयोग किया जिनका हर 12 था, चूंकि उनके भार (weight) और धन-राशिको 12 भागों के पदों में विभाजित किया गया था। प्राचीन हिन्दू गणितज्ञों ने भी भिन्नों का प्रयोग किया, यद्यपि उन्होंने अपने संकेतों में भिन्न वाली रेखा का प्रयोग नहीं किया। उदाहरणार्थ, ब्रह्मगुप्त (जन्म 598 ई०) ने भिन्नों के साथ संक्रियाओं के लिए नियम प्रदान किए। ये नियम लगभग वैसे ही हैं जैसे कि आजकल हम प्रयोग करते हैं। नौवीं शताब्दी में भिन्नों और उनके साथ संक्रियाओं के नियम भारत में अरब देशों में फैले। ऐसा विश्वास किया जाता है कि एक भारतीय विद्वान ब्रह्मगुप्त के ब्रह्मस्फुट सिद्धांत को लेकर अरब देश में पहुँचा। इसका प्रसिद्ध अरब गणितज्ञ अलख्वारिज्मी ने अरबी भाषा में अनुवाद किया। तदुपरान्त हिन्दुओं द्वारा किया गया यह कार्य अरब देशों से इटली तथा पश्चिमी देशों में फैला।
आइए कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 1 : निम्न परिमेय संख्याओं को लिखने के लिए संख्याकों (numerals) का प्रयोग कीजिए :

(i) दो-सातांश (sevenths) (ii) एक-शतांश (hundredth) (iii) सत्रह-पच्चीसांश (twentyfifths)

हल : हम संख्याओं को इस प्रकार लिखते हैं :

$$(i) \frac{2}{7} \quad (ii) \frac{1}{100} \quad (iii) \frac{17}{25}$$

उदाहरण 2 : निम्न में से प्रत्येक को शब्दों में लिखिए :

$$(i) \frac{7}{8} \quad (ii) \frac{19}{5} \quad (iii) \frac{5}{11}$$

- (iii) एक मिलीग्राम, एक ग्राम का कौन सा भाग है ?
- (iv) एक पाँच पैसे का सिक्का, एक रुपये का कौन सा भाग है ?
- (v) एक सेंटीमीटर, एक मीटर का कौन सा भाग है ?

4. निम्न परिमेय संख्याओं के अंश और हर लिखिए :

$$(i) \frac{2}{3} \quad (ii) \frac{101}{10} \quad (iii) \frac{56}{87}$$

$$(iv) \frac{-5}{7} \quad (v) 8$$

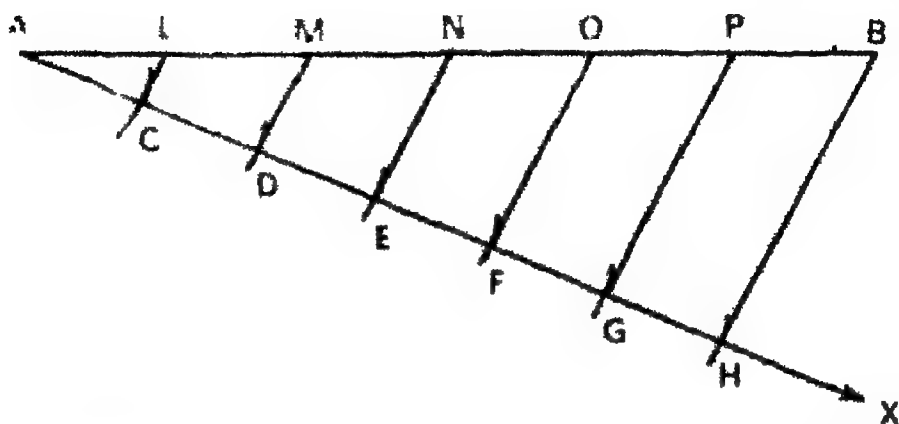
5. परिमेय संख्या $\frac{1075}{803}$ के अंश तथा हर का अंतर ज्ञात कीजिए ।

6. वह परिमेय संख्या लिखिए जिसका अंश चार अंकों की सबसे बड़ी पूर्ण संख्या है तथा जिसका हर तीन अंकों का सबसे छोटा धनपूर्णक है ।
7. एक स्कूल की सातवीं कक्षा में 40 विद्यार्थी हैं । यह कक्षा बाढ़ पीड़ित कोष में 100 रु० देने का निर्णय करती है । प्रत्येक विद्यार्थी को कितनी धनराशि देनी चाहिए ?
8. एक फर्म के चार बराबर के साझेदार हैं । एक वर्ष उस फर्म को 10050 रु० का लाभ होता है । प्रत्येक साझेदार को कितना लाभ होगा ?
9. एक स्टेडियम में एक दौड़ के मार्ग (race-track) की माप 400 मीटर है । 5000 मीटर की एक दौड़ के लिए खिलाड़ी को उसके कितने चक्कर लगावे पड़ेंगे ?

1.3 एक रेखाखंड को दो हुई संख्या के समान रेखाखंडों में विभाजित करना

अब हम एक महत्वपूर्ण रचना के विषय में अध्ययन करते हैं । यह रचना है कि एक रेखाखंड को दो हुई संख्या के समान रेखाखंडों में विभाजित करना । हमें परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित करने में इस रचना की आवश्यकता पड़ेगी ।

मान लीजिए हम एक रेखाखंड AB दिया हुआ है जिसकी लम्बाई,



आकृति 1.1 एक रेखाखंड का दी गई संख्या के समान रेखाखंडों में विभाजन

उदाहरणार्थ, 10 सें० मी० है। यह भी मान लीजिए कि इसे हमें, उदाहरणार्थ, 6 समान रेखाखंडों में विभाजित करना है।

हम यह रचना निम्न चरणों में करते हैं:

चरण 1 : हम $AB = 10$ सें० मी० खींचते हैं और एक कोण BAX की रचना इस प्रकार करते हैं कि $\angle BAX$ मूलकोण* हो।

चरण 2 : परकार की सहायता से हम AX पर छः बिन्दु C, D, E, F, G तथा H इस प्रकार अंकित करते हैं कि $AC = CD = DE = EF = FG = GH$ हो।

चरण 3 : हम B और H को जोड़ते हैं।

* यह आवश्यक नहीं है कि $\angle BAX$ मूलकोण ही हो। परन्तु यदि यह मूलकोण हो तो यह रचना करने में अधिक सुविधाजनक रहता है।

चरण 4: G से होकर हम HB के समांतर एक रेखा GP खींचने हैं। इसी प्रकार F से होकर हम $FO \parallel HB$ खींचते हैं और इसी प्रकार अन्य बिन्दुओं से भी रेखाएँ खींचते हैं जैसाकि आकृति 1.1 में दिखाया गया है।

यह सिद्ध किया जा सकता है कि रेखाखंड AB का समान रेखाखंडों AL, LM, MN, NO, OP तथा PB में विभाजित हो गया है। परन्तु इसकी उपपत्ति हमारी चर्चा की सीमा के बाहर है। आप इसकी उपपत्ति का अगली कक्षाओं में अध्ययन करेंगे।

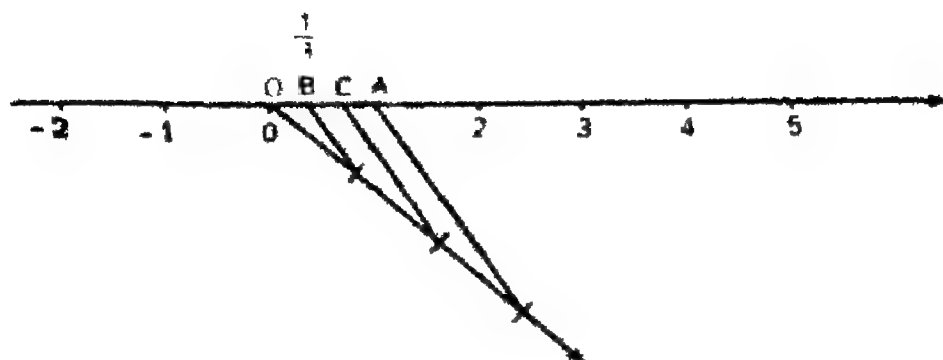
प्रश्नावली 1.2

1. एक 8 सें०मी० लम्बाई का रेखाखंड खींचिए। इसको 5 समान रेखाखंडों में विभाजित करने के लिए अनुच्छेद 1.3 की विधि का प्रयोग कीजिए। मापन से जाँच कीजिए कि प्रत्येक रेखाखंड 1.6 सें० मी० लम्बाई का है।
2. एक 11 सें० मी० लम्बाई के रेखाखंड को 4 समान रेखाखंडों में विभाजित कीजिए।
3. एक 6 सें० मी० लम्बाई के रेखाखंड को 8 समान रेखाखंडों में विभाजित कीजिए।

1.4 परिमेय संख्याओं का संख्या रेखा पर निरूपण

पिछली कक्षाओं में हमने पूर्ण संख्याओं और पूर्णांकों को संख्या रेखा पर निरूपित करना सीखा था। अब हम यह देखेंगे कि परिमेय संख्याओं को ज्यामितीय रूप से किस प्रकार निरूपित किया जाता है।

उदाहरणार्थ, संख्या $\frac{1}{3}$ पर विचार कीजिए। संख्या को पढ़ने से ही कुछ

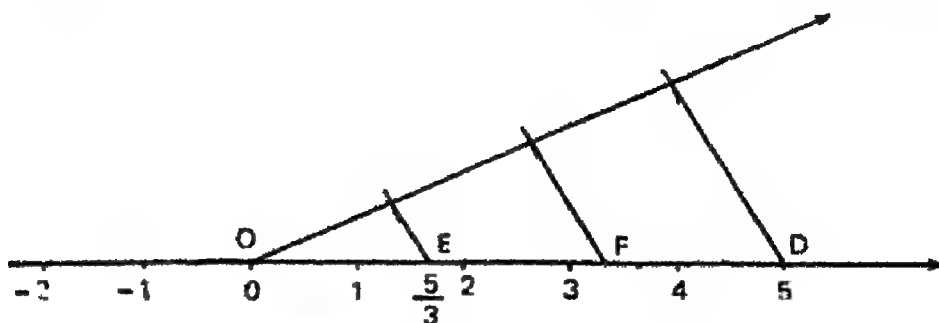


आकृति 1.2: $\frac{1}{3}$ का निरूपण

संकेत प्राप्त होता है। याद कीजिए कि हम $\frac{1}{3}$ को 'एक-तिहाई' अर्थात् 1 का तीसरा भाग पढ़ते हैं। अतः हम 0 से 1 तक की दूरी (अंतराल) OA लेते हैं और OA को तीन समान रेखाखंडों OB , BC तथा CA में विभाजित करते हैं जैसा कि आकृति 1.2 में दिखाया गया है। तब, बिंदु B परिमेय संख्या $\frac{1}{3}$ को निरूपित करता है।

अब मान लीजिए कि हम संख्या $\frac{5}{3}$ को निरूपित करना चाहते हैं। पुनः संख्या को पढ़ने से ही कुछ संकेत प्राप्त हो जाता है। हम इस संख्या को 'पाँच-तिहाई' पढ़ते हैं। अतः हम 0 से 5 तक की दूरी (अंतराल) OD लेते हैं। [ध्यान कीजिए कि बिंदु D , संख्या 5 को निरूपित करता है।]

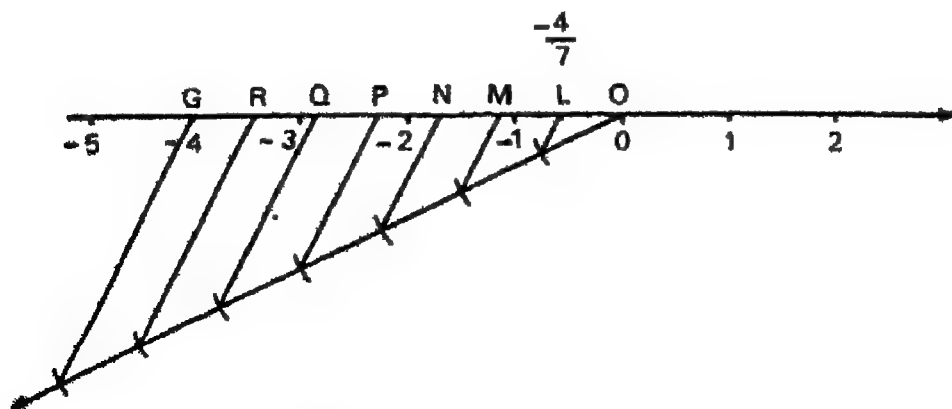
हम OD को तीन समान रेखाखंडों OE , EF तथा FD में विभाजित करते



आकृति 1.3 : $\frac{5}{3}$ का निरूपण

है जैसाकि आकृति 1.3 में दिखाया गया है। तब बिन्दु E , परिमेय संख्या $\frac{5}{3}$ को निरूपित करता है।

अंत में, आइए परिमेय संख्या, उदाहरणार्थ, $-\frac{4}{7}$ को निरूपित करें। हम इस



आकृति 1.4 : $-\frac{4}{7}$ का निरूपण

संख्या को 'पूर्ण चार-सानाई' पड़ते हैं। अतः हम 0 से - 4 तक की दूरी (अंतराल) OG लेते हैं। [ध्यान दीजिए कि बिंदु G संख्या - 4 को निरूपित करता है।] अब हम OG को सात समान रेखाखंडों OH, HM, MN, NP, PQ, QR तथा RG में विभाजित करते हैं। तब बिंदु I , संख्या $-\frac{4}{7}$ को निरूपित करता है।

(देखिए आकृति 1.4)

इस विधि से किसी भी परिमेय संख्या को संख्या रेखा पर निरूपित किया जा सकता है। आइए, एक उदाहरण लें।

उदाहरण : मान लीजिए बिंदु O और A संख्या रेखा पर क्रमशः 0 और 1 निरूपित करते हैं। बिंदु की तीन परिमेय संख्याओं को निरूपित करने के लिए O और 1 के बीच में तीन बिंदु अंकित कीजिए।

[संकेत : एक विधि यह है कि OA को चार समान रेखाखंडों, उदाहरणार्थ OB, BC, CD तथा DA में विभाजित कर लिया जाए। तब, B संख्या $\frac{1}{4}$ निरूपित करेगा, C संख्या $\frac{2}{4}$ निरूपित करेगा, तथा D संख्या $\frac{3}{4}$ निरूपित करेगा।]

प्रवृत्तावली 1.3

1. निम्न परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए :

$$(i) \frac{3}{7} \quad (ii) \frac{9}{4} \quad (iii) -\frac{3}{8} \quad (iv) -\frac{10}{4}$$

* हमने यह सीखा है कि अकारणक हज़ों वाणी परिमेय संख्याओं को किस प्रकार निरूपित किया जाता है। हम यह जगह दिखाएंगे कि यदि हर अकारणक हो तो भी परिमेय संख्या को इस प्रकार निरूपित सर्वत्र संभव है कि उसका हर अकारणक हो जाये।

2. मान लीजिए O , A और B संख्या रेखा पर क्रमशः 0 , 2 और -1 को निरूपित करते हैं।
- (i) किन्हीं पाँच परिमेय संख्याओं को निरूपित करने के लिए O और A के बीच में पाँच बिंदु अंकित कीजिए। आपने कौन सी संख्याएँ निरूपित की हैं?
- (ii) किन्हीं तीन परिमेय संख्याओं को निरूपित करने के लिए O और B के बीच में तीन बिंदु अंकित कीजिए। आपने कौन सी संख्याएँ निरूपित की हैं?
3. संख्या रेखा पर निम्न परिमेय संख्याओं को निरूपित करने वाले बिंदु अंकित कीजिए :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}$$

मुख्य संकल्पनाएँ

परिमेय संख्याएँ

हर

मिन्न

संख्या रेखा पर निरूपण

अंश

परिमेय संख्याओं का योग एवं व्यवकलन

इस एकक में हम यह सीखेंगे कि परिमेय संख्याओं को किस प्रकार जोड़ा और घटाया जाता है तथा साथ ही हम इन संख्याओं के गुणों का भी अध्ययन करेंगे।

2.1 भूमिका

परिमेय संख्याओं का योग और व्यवकलन सीखने से पहले हमें यह जानना आवश्यक है कि दो परिमेय संख्याएँ समान (equal) कब होती हैं। आइए, निम्न स्थिति पर विचार करें :

मान लीजिए, हम 2 दर्जन केने तीन व्यक्तियों में बराबर-बराबर बाँटते हैं। प्रत्येक को क्या मिलेगा ? हम देखते हैं कि प्रत्येक व्यक्ति को $\frac{2}{3}$ दर्जन (अर्थात् 8) केने मिलते हैं। अब मान लीजिए, हम 4 दर्जन केने छः व्यक्तियों में बराबर-बराबर बाँटते हैं। प्रत्येक को क्या मिलेगा ? पुनः हम देखते हैं कि प्रत्येक व्यक्ति को $\frac{4}{6}$ दर्जन (अर्थात् 8) केने मिलते हैं।

उपरोक्त से सुझाव* मिलता है कि हमें परिमेय संख्या $\frac{2}{3}$ को परिमेय संख्या $\frac{4}{6}$

* साथ ही, यदि हम संख्याओं $\frac{2}{3}$ और $\frac{4}{6}$ को संज्ञा रेखा पर निरूपित करें तो हम देखते हैं कि दोनों संख्याएँ एक ही बिंदु के निरूपित हो जाती हैं।

के समान (बराबर) समझना चाहिए। (क्यों ?) हम इसे इस प्रकार लिखते हैं :

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \quad (1)$$

(1) में हम देखते हैं कि

$$2 \times 6 = 3 \times 4 \quad (2)$$

हम कहते हैं कि परिमेय संख्याएँ $\frac{a}{b}$ तथा $\frac{c}{d}$ समान होती हैं यदि

$$a \times d = b \times c \text{ हो।}$$

हम इसे $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ लिखते हैं।

आइए, अब कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 1 : निम्न परिमेय संख्याओं के युग्मों में से कौन से युग्म समान हैं ?

(i) $\frac{10}{15}, \frac{2}{3}$

(ii) $\frac{-3}{5}, \frac{-3}{-5}$

(iii) $\frac{4}{9}, \frac{-4}{-9}$

(iv) $\frac{-2}{3}, \frac{2}{-3}$

हल : (i) क्या $10 \times 3 = 15 \times 2$ है ? हाँ, है। इस प्रकार,

$$\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

(ii) क्या $(-3) \times (-5) = 5 \times (-3)$ है ? नहीं, ऐसा नहीं है। (क्यों ?)

इस प्रकार, $\frac{-3}{5}$ और $\frac{-3}{-5}$ समान नहीं हैं। हम इसे इस प्रकार

लिखते हैं :

$$\frac{-3}{5} \neq \frac{-3}{-5}$$

(iii) क्या $4 \times (-9) = 9 \times (-4)$ है ? हाँ, है। इस प्रकार,

$$\frac{4}{9} = \frac{-4}{-9}$$

(iv) क्या $(-2) \times (-3) = 3 \times 2$ है ? हाँ, है। इस प्रकार,

$$\frac{-2}{3} = \frac{2}{-3}$$

(iv) में हम देखते हैं कि किस प्रकार एक ऐसी परिमेय संख्या को जिसका हर अनात्मक है एक ऐसी परिमेय संख्या के रूप में लिखा जा सकता है जिसका हर अनात्मक है। हम केवल यश का बिन्दु जान देते हैं।

इस प्रकार,

$$\frac{16}{17} = \frac{16}{17} = \frac{21}{23} = \frac{21}{23} = \frac{8}{13} = \frac{(-8)}{13} = \frac{8}{13}$$

अगले उदाहरण में परिमेय संख्याओं का एक मूलभूत गुण प्राप्त होता है। इसके अनुसार हम परिमेय संख्या के अश तथा हर में निहित उभयनिष्ठ गुणनखंडों को काट सकते हैं।

उदाहरण 2 : यदि $\frac{a}{b}$ कोई परिमेय संख्या है तथा m कोई शून्येतर (non-zero) पूर्णांक है, तो

$$\frac{m \times a}{m \times b} = \frac{a}{b}$$

आपको याद होगा कि तीन पूर्णाकों को हम किसी भी क्रम में गुणा कर सकते हैं। इस प्रकार, यदि a , m तथा b तीन पूर्णांक हों तो हम देख सकते हैं कि

$$(m \times a) \times b = (m \times b) \times a$$

अतः हम कह सकते हैं कि परिमेय संख्याएँ $\frac{a}{b}$ तथा $\frac{m \times a}{m \times b}$ समान* हैं। क्या आप जानते हैं कि ये क्यों समान हैं? हमने परिमेय संख्याओं की समानता की परिभाषा का प्रयोग किया है।

हम इसे इस प्रकार लिखते हैं :

$$\frac{m \times a}{m \times b} = \frac{a}{b}$$

$$\text{उदाहरणार्थ, } \frac{6}{9} = \frac{3 \times 2}{3 \times 3} = \frac{2}{3}$$

* m शून्येतर पूर्णांक होना चाहिए।

परिमेय संख्याओं का योग एवं व्यवकलन

$$\frac{12}{20} = \frac{3 \times 4}{5 \times 4} = \frac{3}{5};$$

$$-\frac{16}{40} = \frac{8 \times (-2)}{8 \times 5} = -\frac{2}{5}$$

जब किसी परिमेय संख्या के अंश तथा हर में 1 के अतिरिक्त कोई अन्य उभयनिष्ठ गुणनखंड न हो तो हम कहते हैं कि वह परिमेय संख्या निम्नतम पदों (lowest terms) में है, या यह कि परिमेय संख्या निम्नतम पदों में व्यक्त की गई है।

उदाहरण 3 : $\frac{64}{48}$ तथा $\frac{2916}{1440}$ को निम्नतम पदों में व्यक्त कीजिए।

हल : $\frac{64}{48} = \frac{16 \cdot 4}{16 \times 3} = \frac{4}{3}$

$$\frac{2916}{1440} = \frac{9 \times 4 \times 9 \times 9}{9 \times 4 \times 40} = \frac{81}{40}$$

प्रश्नावली 2.1

1. निम्न परिमेय संख्याओं के युग्मों में से कौन से युग्म समान हैं ?

(i) $\frac{0}{1}, \frac{0}{3}$

(ii) $\frac{5}{20}, \frac{1}{4}$

(iii) $\frac{3}{7}, -\frac{3}{7}$

(iv) $-\frac{200}{3}, \frac{20}{3}$

(v) $\frac{101}{10}, \frac{1010}{100}$

2. परिमेय संख्या $\frac{3}{5}$ के बराबर विभिन्न अंशों वाली पाँच परिमेय संख्याएँ लिखिए।
3. निम्न में से प्रत्येक को दुबारा इस प्रकार लिखिए कि इनका हर घनात्मक हो :
- $$\frac{5}{-3}, \frac{-22}{-10}, \frac{-729}{-27}$$
4. निम्न में से प्रत्येक को निम्नतम पदों में व्यक्त कीजिए :
- $$\frac{84}{48}, \frac{101}{202}, \frac{-120}{45}, \frac{545}{1460}, \frac{11}{17}$$

2.2 अनात्मक और अनात्मक परिमेय संख्याएँ

आइए परिमेय संख्या की परिभाषा का पुनरावलोकन करें। यह ऐसी संख्या है जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में रखा जा सकता है जहाँ p और q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$ है। साथ ही, याद कीजिए कि p परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ का अंश कहलाता है तथा q हर कहलाता है।

अब चूँकि p और q पूर्णांक हैं अतः इनमें से प्रत्येक या तो अनात्मक हो सकता है या अनात्मक। थोड़ी देर के लिए हम उस स्थिति की चिन्ता न करें जब p शून्य होगा।

हम कहते हैं कि परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ अनात्मक होती है यदि उसके अंश और हर दोनों अनात्मक हों या दोनों अनात्मक हों। परन्तु यदि अंश अनात्मक और हर अनात्मक हो अथवा अंश अनात्मक और हर अनात्मक हो तो हम कहते हैं कि परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ अनात्मक है। दूसरे शब्दों में, यदि अंश और हर समान

चिन्ह (same sign) के हों तो परिमेय संख्या धनात्मक होती है। परन्तु यदि अंश और हर विपरीत चिन्हों (opposite signs) के हों तो परिमेय संख्या ऋणात्मक होती है। $\frac{2}{3}$, $\frac{545}{1460}$, $\frac{-4}{-5}$, $\frac{-729}{-273}$, इत्यादि धनात्मक परिमेय

संख्याओं के उदाहरण हैं। $\frac{-20}{13}$, $\frac{-162}{483}$, $\frac{23}{-71}$, $\frac{1635}{-2750}$, इत्यादि ऋणात्मक परिमेय संख्याओं के उदाहरण हैं।

हम यह पहचान देना चुके हैं कि किस प्रकार एक ऐसी परिमेय संख्या को जिसका हर ऋणात्मक है एक ऐसी परिमेय संख्या के रूप में लिखा जा सकता है जिसका हर धनात्मक है। क्या आपको याद है कि यह किस प्रकार किया जाता है? हम केवल अंश का चिन्ह बदल देते हैं। इस प्रकार, $-\frac{2}{3} = \frac{-2}{3}$ । परम्परागत हम इन परिमेय संख्याओं में से प्रत्येक को $-\frac{2}{3}$ लिखते हैं। इस प्रकार,

$$-\frac{214}{721} = \frac{-214}{721} = -\frac{214}{721}$$

परिमेय संख्या 0 न तो धनात्मक है और न ही ऋणात्मक।

हम देखते हैं कि संख्या रेखा पर धनात्मक परिमेय संख्याएँ निरूपित करने वाले बिंदु शून्य के बाईं ओर स्थित हैं। साथ ही ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ निरूपित करने वाले बिंदु शून्य के बाईं ओर स्थित हैं।

प्रश्नावली 2.2

1. निम्न में से कौन सी संख्या घनात्मक है और कौन सी अघनात्मक? यह भी बताइए कि संख्या रेखा पर ये संख्याएँ शून्य के किस ओर स्थित होंगी।

$$(i) \frac{103}{5} \quad (ii) -\frac{702}{7}$$

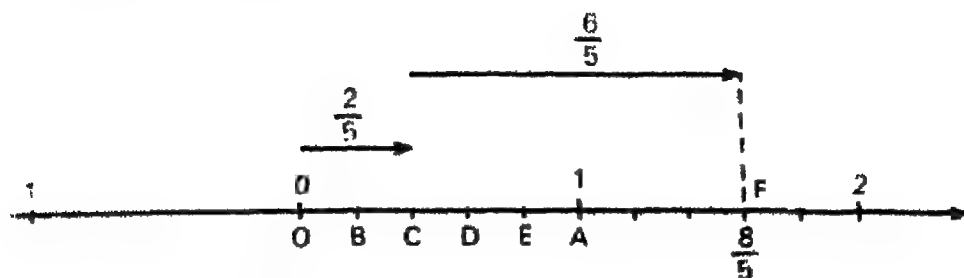
$$(iii) \frac{5}{-8} \quad (iv) \frac{8}{-13}$$

$$(v) \frac{921}{-6}$$

2.3 परिमेय संख्याओं का योग

जीना अपनी सहेली राधा के घर $\frac{2}{5}$ किलोमीटर की दूरी चलकर पहुँचती है। उससे मिलने के बाद वह उसी दिशा में $\frac{6}{5}$ किलोमीटर चलकर एक अन्य सहेली इन्द्रा के घर पहुँचती है। उसने अपने घर से इन्द्रा के घर तक पहुँचने में कितनी दूरी चली? दूसरे शब्दों में, हम $\frac{2}{5}$ और $\frac{6}{5}$ का योग ज्ञात करना चाहते हैं। जाइए $\frac{2}{5} + \frac{6}{5}$ ज्ञात करने के लिए पहले संख्या रेखा का प्रयोग करें। हम कैसे प्रारम्भ करें? क्या आपको याद है कि हमने पूर्णांकों के लिए क्या किया था? हम 0 से 1 तक की दूरी (अंतराल) OA को पाँच समान रेखाखंडों में विभाजित करते हैं जैसा कि आकृति 2.1 में दिखाया गया है। तब B संख्या $\frac{1}{5}$ तथा C संख्या $\frac{2}{5}$ निरूपित करता है। दूसरे शब्दों में, $OB = \frac{1}{5}$ तथा $OC = \frac{2}{5}$ है। अब हम C से प्रारम्भ करेंगे और बाईं ओर (क्यों?) छः पय (steps)

इस प्रकार बतलाने कि प्रत्येक पग OB अर्थात् $\frac{1}{5}$ के बराबर हो। मान लीजिए,



$$\text{वाक्य 2.1 : } \frac{2}{5} + \frac{6}{5} = \frac{8}{5}$$

अंत में हम बिन्दु F पर पहुँचते हैं। OF में OB (अर्थात् $\frac{1}{5}$) के बराबर कितने पग हैं? OF में ऐसे आठ पग हैं। इस प्रकार,

$$\frac{2}{5} + \frac{6}{5} = \frac{8}{5}$$

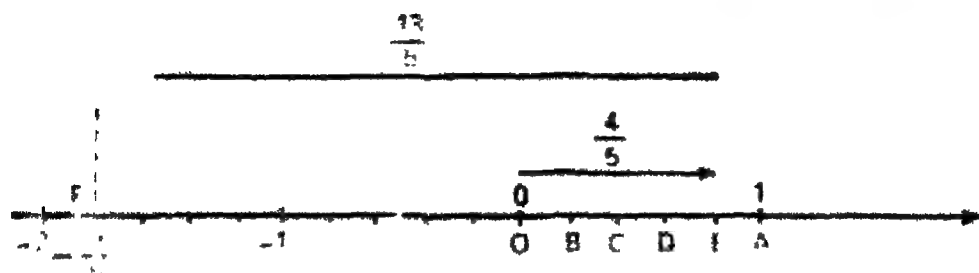
इस प्रकार शीला ने अपने घर से इन्द्रा के घर तक पहुँचने में $\frac{8}{5}$ किलोमीटर की दूरी चली।

हम देखते हैं कि $\frac{2}{5}$ और $\frac{6}{5}$ में हर समान है। साथ ही, यदि हम अंशों को जोड़ लें तथा योग को (समान) हर से विभाजित कर दें तो हमें वांछित परिणाम प्राप्त हो जाता है। दूसरे शब्दों में,

$$\frac{2}{5} + \frac{6}{5} = \frac{2+6}{5} = \frac{8}{5}$$

आइए एक अन्य उदाहरण लें। मान लीजिए हम $\frac{4}{5}$ और $-\frac{13}{5}$ को जोड़ना

जाते हैं। निम्ने उदाहरण जो की तरह हम 11 में 1 एक की दूरी (अंतरान) 1) की तीन समान रेखाखंडों में विभाजित करते हैं। (देखिए आकृति 2.2)



$$\text{आकृति 2.2} \quad \frac{4}{5} + \left(-\frac{13}{5} \right) = -\frac{9}{5}$$

अब B मक्या $\frac{1}{5}$ तथा E मक्या $\frac{4}{5}$ निरूपित करता है। दूसरे शब्दों में, $OB = \frac{1}{5}$ तथा $OE = \frac{4}{5}$ है। अब हम E से प्रारम्भ करके बाईं ओर (क्यों?) तेरछ पग इस प्रकार चलते हैं कि प्रत्येक पग OB अर्थात् $\frac{1}{5}$ के बराबर है। मान लीजिए कि अब में हम बिंदु F पर आ जाते हैं। OF में OB (अर्थात् $\frac{1}{5}$) के बराबर कितने पग है? OF में ऐसे नौ पग हैं। इस प्रकार,

$$\frac{4}{5} + \left(-\frac{13}{5} \right) = -\frac{9}{5}$$

हम पुनः देखते हैं कि $\frac{4}{5}$ और $-\frac{13}{5}$ में हर समान है। साथ ही यदि हम अंशों को जोड़ेंगे तथा योगको (समान) हर से विभाजित कर दें तो हमें वांछित परिणाम

प्राप्त हो जाता है। हमारे शब्दों में,

$$\frac{4}{5} + \left(-\frac{13}{5}\right) = \frac{4+(-13)}{5} = -\frac{9}{5}$$

[पाठक को चाहिए कि वह उपर्युक्त विधि से, उदाहरणार्थ, $\left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{8}{5}$ तथा $\left(-\frac{9}{5}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right)$ ज्ञात करे।]

इस प्रकार हमें समान हरों वाली परिमेय संख्याओं के योग के लिए निम्न नियम प्राप्त होता है :

यदि $\frac{a}{c}$ और $\frac{b}{c}$ समान हरों वाली दो परिमेय संख्याएँ दी हुई हैं, तो

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

हमारे शब्दों में, समान हरों वाली दो परिमेय संख्याओं का योग ज्ञात करने के लिए हम केवल उनके अंशों को जोड़ते हैं और इस योग में समान हर का भाग दे देते हैं।

आइए कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 1 : $-\frac{3}{5} + \frac{8}{5}$ ज्ञात कीजिए।

हल : उपर्युक्त नियम का प्रयोग करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$-\frac{3}{5} + \frac{8}{5} = \frac{-3+8}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

उदाहरण 2 : $-\frac{9}{5} + \left(-\frac{3}{5}\right)$ ज्ञात कीजिए।

हल : पुनः नियम का प्रयोग करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$-\frac{9}{5} + \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{-9+(-3)}{5} = \frac{-12}{5} = -\frac{12}{5}$$

अब, यदि हर समान न हों तब हम क्या करेंगे ? मान लीजिए हम $\frac{3}{4}$ और $\frac{5}{7}$ को जोड़ना चाहते हैं। हम कैसे प्रारम्भ करें ? यदि हम किसी प्रकार इनके हरों को समान बना सकें तो हम उस नियम का प्रयोग कर सकते हैं जो हमने अभी सीखा है। हम इनके हरों को समान कैसे बनाएंगे ?

आपकी याद होगी कि एक परिमेय संख्या को निम्नतम पदों में व्यक्त करने के लिए हमने क्या किया था। हमने अंश तथा हर में निहित उभयनिष्ठ गुणनखंड को काट दिया था। आइए इस पर एक अन्य दृष्टिकोण से विचार करें। यदि एक परिमेय संख्या दो हुई हो तो क्या हम उसके अंश और हर को एक ही गुणक से गुणा नहीं कर सकते ? निश्चय ही, हम ऐसा कर सकते हैं। दूसरे शब्दों में,

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}; \quad \frac{2}{3} = \frac{2 \times (-5)}{3 \times (-5)} = \frac{-10}{-15}; \text{ इत्यादि}$$

आइए अब हम अपनी $\frac{3}{4} + \frac{5}{7}$ को जान करने की समस्या पर वापिस आ जाएँ।

हम निम्न सकते हैं कि

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 7}{4 \times 7}$$

तथा,
$$\frac{5}{7} = \frac{5 \times 4}{7 \times 4}$$

अब इनके हर समान बना दिए गए हैं। इस प्रकार,

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{7} = \frac{3 \times 7}{4 \times 7} + \frac{5 \times 4}{7 \times 4} = \frac{21}{28} + \frac{20}{28} = \frac{21 + 20}{28}$$

$$\text{अर्थात्, } \frac{3}{4} + \frac{5}{7} = \frac{41}{28}$$

इस प्रकार हमें किन्हीं दो परिमेय संख्याओं को जोड़ने के लिए निम्न नियम प्राप्त होता है :

यदि $\frac{a}{b}$ तथा $\frac{c}{d}$ कोई दो परिमेय संख्याएँ हैं, तो

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

दूसरे शब्दों में, किन्हीं दो परिमेय संख्याओं का योग ज्ञात करने के लिए,

(1) पहले हम उनके हरों को समान बनाते हैं, तथा

(2) फिर समान हरों वाली परिमेय संख्याओं के योग का नियम प्रयोग करते हैं।

अब हम इस नियम को कुछ उदाहरणों से स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 3 : $-\frac{2}{3}$ तथा $\frac{5}{8}$ का योग ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल : } -\frac{2}{3} + \frac{5}{8} = \frac{(-2) \times 8 + 3 \times 5}{3 \times 8} = \frac{-16 + 15}{24}$$

$$\text{अर्थात्, } -\frac{2}{3} + \frac{5}{8} = -\frac{1}{24} = -\frac{1}{24}$$

उदाहरण 4 : $\frac{27}{16} + \frac{15}{21}$ परिकलित कीजिए।

$$\text{हल : } \frac{27}{16} + \frac{15}{21} = \frac{27 \times 21 + 16 \times 15}{16 \times 21} = \frac{567 + 240}{336}$$

$$\text{अर्थात्, } \frac{27}{16} + \frac{15}{21} = \frac{807}{336}$$

आपको याद होगा कि पूर्णांकों को हम चाहे किसी भी क्रम में जोड़ें उससे कुछ अन्तर नहीं पड़ता। परिमेय संख्याओं के बारे में आप क्या सोचते हैं? क्या

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \text{ है?}$$

निश्चय ही, ऐसा है। क्योंकि,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad \cdot bc}{bd} + \frac{bc \cdot ad}{bd} \quad (\text{क्यों?})$$

$$= \frac{bc}{bd} + \frac{ad}{bd} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

क्या आपको इस गुण का नाम याद है? हम कहते हैं कि परिमेय संख्याओं का योग क्रमविनिमेय है। परन्तु यह नाम इतना महत्वपूर्ण नहीं है। जो याद रखना महत्वपूर्ण है वह है कि परिमेय संख्याओं को चाहें हम किसी भी क्रम में जोड़ें उससे कुछ अंतर नहीं पड़ता। अर्थात्,

यदि $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ कोई दो परिमेय संख्याएँ हैं, तो

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

यदि हम योग के लिए एक संक्रिया सारणी (operation table for addition) बना ले तो यह गुण बहुत अच्छी प्रकार से समझा जा सकता है।

आइए केवल पाँच परिमेय संख्याएँ, उदाहरणार्थ, $-\frac{2}{5}$, $-\frac{1}{5}$, 0 , $\frac{1}{5}$ तथा

ही है। हमें निम्न सारणी प्राप्त होती है :

		दूसरी संख्या				
		$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
पहली संख्या	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0
	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$

मुख्य विकर्ण

क्या आपको याद है कि इस सारणी को किस प्रकार 'पढ़ा' जाता है? दो मन्त्राओं का योग वहाँ दिया है जहाँ इन संख्याओं वाले 'पंक्ति' और 'स्तंभ' परस्पर प्रतिच्छेद करते हैं।

हम देखते हैं कि संक्रिया सारणी मुख्य विकर्ण के सापेक्ष सममित (symmetrical) है। सारणी से, उदाहरणार्थ, यह तुरन्त स्पष्ट हो जाता है कि

$$-\frac{2}{5} + -\frac{1}{5} = -\frac{1}{5} + -\frac{2}{5}, \quad 0 + \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + 0, \text{ इत्यादि।}$$

हम सारणी से यह भी देखेंगे कि

$$\begin{array}{rcl} 0 + \frac{2}{5} & = & \frac{2}{5} \\ 0 + \frac{1}{5} & = & \frac{1}{5} \\ 0 + 0 & = & 0 \\ 0 + \frac{1}{5} & = & \frac{1}{5} \\ 0 + \frac{2}{5} & = & \frac{2}{5} \end{array}$$

क्या यह वही नहीं है जिसको हम जाना कर सकते थे ? हाँ, यह वही है।

यदि $\frac{a}{b}$ एक परिमेय संख्या है, तो

$$0 + \frac{a}{b} = \frac{0}{1} + \frac{a}{b} = \frac{0 + 1 \times a}{1 \times b} = \frac{a}{b}$$

हमारे जड़ों में, शून्य और किसी परिमेय संख्या का योग स्वयं वह परिमेय संख्या ही होता है। यह गुण का योग शून्य (addition property of zero) कहलाता है तथा 0, योग के निष्पत्त्यमक अवयव (identity element) कहलाता है। पुनः यह नाम इतना महत्वपूर्ण नहीं है। जो हम स्तर पर महत्वपूर्ण है वह है इस गुण का ज्ञान तथा यह जानना कि इस गुण का व्यावहारिक स्थितियों में सही प्रकार से किस प्रकार प्रयोग किया जा सकता है।

संकेतों का प्रयोग कर हम उपर्युक्त गुण को निम्न प्रकार लिख सकते हैं :

यदि $\frac{a}{b}$ कोई परिमेय संख्या है, तो

$$0 + \frac{a}{b} = \frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$$

अब यदि हमें तीन परिमेय संख्याओं को जोड़ना हो तो क्या होगा ?

हम शून्य से धर जाता है। वह अपना गृह-कार्य पूरा करने के लिए बैठता है। वह गणित पर $\frac{3}{4}$ घंटे, सामाजिक विज्ञान पर $\frac{2}{3}$ घंटे तथा हिन्दी पर 1 घंटा

व्यतीत करता है। वह अपना गृह-कार्य पूरा करने में कितना समय व्यतीत करता है? दूसरे शब्दों में, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ तथा 1 का योग ज्ञात करने के लिए आप क्या करेंगे? आप शायद पहले $\frac{3}{4}$ और $\frac{2}{3}$ का योग ज्ञात करेंगे और फिर योग में 1 जोड़ेंगे।

योग ज्ञात करने की इस विधि को निम्न प्रकार दर्शाया जा सकता है :

$$\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3}\right) + 1 = \left(\frac{3 \times 3 + 4 \times 2}{4 \times 3}\right) + 1 = \frac{17}{12} + 1 = \frac{17 + 12}{12} = \frac{29}{12}$$

आइए अब देखें कि यदि हम पहले $\frac{2}{3}$ और 1 को जोड़ें तथा फिर इस योग में $\frac{3}{4}$ जोड़ें तो हमें क्या योग प्राप्त होता है। दूसरे शब्दों में, $\frac{3}{4} + \left(\frac{2}{3} + 1\right)$ कितना है? हम देखते हैं कि

$$\frac{3}{4} + \left(\frac{2}{3} + 1\right) = \frac{3}{4} + \left(\frac{2 \times 1 + 3 \times 1}{3 \times 1}\right) = \frac{3}{4} + \frac{5}{3} = \frac{29}{12}$$

इस प्रकार,

$$\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3}\right) + 1 = \frac{3}{4} + \left(\frac{2}{3} + 1\right)$$

हम देखते हैं कि हरि को गृह-कार्य पूरा करने में $\frac{29}{12}$ घंटे लगेंगे।

उपर्युक्त उदाहरण से (परिमेय संख्याओं के) योग का एक अन्य महत्वपूर्ण गुण कि परिमेय संख्याओं का योग सहचारी होता है, स्पष्ट होता है। पुनः यह नाम इतना महत्वपूर्ण नहीं है। जो महत्वपूर्ण है वह यह याद रखना कि तीन परिमेय संख्याओं का योग ज्ञात करने के लिए इससे कोई अन्तर नहीं पड़ता कि पहले हम कौन सी दो संख्याएँ लेते हैं और फिर इनके योग में बची हुई तीसरी संख्या जोड़ते हैं।

संकेतों का प्रयोग करके हम परिमेय संख्याओं के योग के साहचर्य गुण

(associative property of addition) को निम्न प्रकार व्यक्त कर सकते हैं :

यदि $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ और $\frac{e}{f}$ कोई तीन परिमेय संख्याएँ हैं, तो

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$$

इस गुण के फलस्वरूप ही हम: प्रायः इन बराबर योगों के स्थान पर $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$ लिखते हैं।

उदाहरण 5: जाँच कीजिए कि

$$\frac{1}{10} + \left(\frac{9}{20} + \frac{3}{11}\right) = \left(\frac{1}{10} + \frac{9}{20}\right) + \frac{3}{11}$$

हल : हम देखते हैं कि

$$\begin{aligned} \frac{1}{10} + \left(\frac{9}{20} + \frac{3}{11}\right) &= \frac{1}{10} + \left(\frac{9 \times 11 + 20 \times 3}{20 \times 11}\right) \\ &= \frac{1}{10} + \frac{159}{220} \\ &= \frac{1 \times 220 + 10 \times 159}{10 \times 220} = \frac{1810}{2200} = \frac{181}{220} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{तथा, } \left(\frac{1}{10} + \frac{9}{20}\right) + \frac{3}{11} &= \left(\frac{1 \times 20 + 10 \times 9}{10 \times 20}\right) + \frac{3}{11} \\ &= \frac{110}{200} + \frac{3}{11} \\ &= \frac{110 \times 11 + 200 \times 3}{200 \times 11} = \frac{1810}{2200} = \frac{181}{220} \end{aligned}$$

$$\text{इस प्रकार, } \frac{1}{10} + \left(\frac{9}{20} + \frac{3}{11}\right) = \left(\frac{1}{10} + \frac{9}{20}\right) + \frac{3}{11}$$

अंत में, आइए अब देखें कि हम बार या अधिक परिमेय संख्याओं को किस प्रकार जोड़ते हैं। हम योग के क्रमविनिमेय और साहचर्य गुणों का, यदि आवश्यक हो तो समबतया कई बार, प्रयोग करते हैं। इस स्तर पर यह महत्वपूर्ण नहीं है कि हम इन गुणों का प्रयोग प्रत्येक पग (step) पर बताते जाएँ। जो महत्वपूर्ण है वह है

‘इस प्रयोग का परिणाम’। परिणाम है कि यदि कई परिमेय संख्याएँ दी हुई हों तो यह आवश्यक नहीं कि उनको उसी क्रम में जोड़ा जाए जिसमें वे दी हुई हैं। हम उनके किसी भी क्रम में समूह बना सकते हैं और फिर उनका योग ज्ञात कर सकते हैं। यह योग का पुनर्व्यवस्थितकरण गुण (rearrangement property of addition) कहलाता है।

अब हम इसे एक उदाहरण की सहायता से स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 6: $\frac{5}{11}, \frac{20}{21}, -\frac{13}{11}$ तथा $\frac{6}{7}$ का योग ज्ञात कीजिए।

हल: चूंकि $\frac{5}{11}$ और $-\frac{13}{11}$ के हर समान हैं, अतः पहले इनका योग ज्ञात करना अधिक सुविधाजनक प्रतीत होता है। हमें निम्न योग प्राप्त होता है:

$$\begin{aligned} \frac{5}{11} + \frac{20}{21} + -\frac{13}{11} + \frac{6}{7} &= \left(\frac{5}{11} + -\frac{13}{11} \right) + \left(\frac{20}{21} + \frac{6}{7} \right) \\ &= \left(\frac{5 + (-13)}{11} \right) + \left(\frac{20 \times 7 + 21 \times 6}{21 \times 7} \right) \\ &= -\frac{8}{11} + \frac{266}{147} \\ &= \frac{(-8) \times 147 + 11 \times 266}{11 \times 147} \\ &= \frac{-1176 + 2926}{1617} = \frac{1750}{1617} \end{aligned}$$

[पाठक को चाहिए कि वह जाँच करे कि यदि वह किसी अन्य क्रम में इन संख्याओं के समूह बनाए (पुनर्व्यवस्थित करे) तो भी उसे यही योग प्राप्त होगा।]

प्रश्नावली 2.3

- परिमेय संख्याओं के निम्न युग्मों का योग ज्ञात करने के लिए सरूपा रेखा का प्रयोग कीजिए:

$$(i) -\frac{3}{5}, \frac{8}{5} \quad (ii) -\frac{9}{5}, -\frac{3}{5}$$

$$(iii) \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$$

$$(iv) \frac{5}{7}, -\frac{10}{14}$$

2. निम्न में से प्रत्येक में योग ज्ञात कीजिए :

$$(i) \frac{11}{8}, \frac{33}{8}$$

$$(ii) \frac{112}{13}, \frac{-298}{13}$$

$$(iii) -\frac{2218}{131}, \frac{1079}{131}$$

$$(iv) -\frac{35009}{149}, -\frac{4999}{149}$$

$$(v) \frac{1}{9}, \frac{23}{9}, \frac{27}{9}$$

$$(vi) -\frac{141}{29}, \frac{729}{29}, -\frac{233}{29}$$

$$(vii) \frac{20293}{1001}, -\frac{30993}{1001}, -\frac{9875}{1001}, \frac{131}{1001}$$

3. परिमेय संख्याओं के निम्न युग्मों का योग ज्ञात कीजिए :

$$(i) \frac{8}{17}, -\frac{3}{10}$$

$$(ii) \frac{5}{16}, \frac{2}{9}$$

$$(iii) \frac{8}{19}, -\frac{2}{9}$$

$$(iv) -\frac{5}{18}, -\frac{17}{8}$$

$$(v) 6, \frac{7}{5}$$

$$(vi) 8, -\frac{3}{2}$$

$$(vii) -\frac{20}{9}, \frac{107}{81}$$

$$(viii) \frac{15}{7}, -\frac{80}{11}$$

$$(ix) -\frac{9}{80}, -7$$

$$(x) \frac{607}{71}, -\frac{73}{91}$$

4. निम्न में से प्रत्येक को परिकल्पित कीजिए :

$$(i) \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{11}{13}$$

$$(ii) \frac{11}{13} + \frac{13}{11} + \left(-\frac{17}{11} \right)$$

$$(iii) 1 + \left(-\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3}$$

$$(iv) \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{5}$$

$$(v) \frac{9}{7} + \frac{2}{11} + \frac{3}{5}$$

$$(vi) -\frac{13}{169} + \frac{11}{13} + \frac{9}{2}$$

$$(vii) -\frac{100}{125} + \frac{200}{25} + \frac{275}{125}$$

$$(viii) \frac{3}{8} + \frac{11}{3} + \frac{6}{15} + \frac{13}{2}$$

$$(ix) \frac{121}{100} + \frac{100}{11} + \left(-\frac{63}{10}\right) + \frac{17}{50}$$

$$(x) \frac{101}{303} + \frac{303}{202} + \left(-\frac{666}{111}\right) + 9$$

5. परिकलित कीजिए :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

6. विनय अपने मासिक वेतन का $\frac{2}{5}$ वाँ भाग खाने पर, $\frac{1}{10}$ वाँ भाग अपने दो बच्चों की शिक्षा पर तथा एक-चौथाई भाग किराये पर व्यय करता है। वह अपने वेतन का कौन सा भाग व्यय करता है ?

2.4 परिमेय संख्या का ऋणात्मक

धनात्मक और ऋणात्मक परिमेय संख्याओं से स्वाभाविक युग्मों, उदाहरणार्थ, 1 और -1 , $\frac{1}{2}$ और $-\frac{1}{2}$, 2 और -2 , $\frac{1}{3}$ और $-\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ और $-\frac{2}{3}$, इत्यादि का संकेत मिलता है। हम देखते हैं कि प्रत्येक युग्म में योग शून्य है अर्थात् $1 + (-1) = 0$, $\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, इत्यादि। ऐसे किसी भी युग्म में प्रत्येक परिमेय संख्या, दूसरी परिमेय संख्या का ऋणात्मक (negative) अर्थात् योग्य प्रतिलोम (additive inverse) कहलाती है।

अतः, $\frac{1}{2}$ का ऋणात्मक $-\frac{1}{2}$ है, $-\frac{1}{2}$ का ऋणात्मक $\frac{1}{2}$ है, इत्यादि।

इस प्रकार, प्रत्येक शून्येतर परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ के लिए एक परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ ऐसी होती है कि $\frac{p}{q} + \left(-\frac{p}{q}\right) = 0$ । $-\frac{p}{q}$, $\frac{p}{q}$ का ऋणात्मक (अर्थात् योग्य प्रतिलोम) कहलाता है। शून्य का ऋणात्मक स्वयं शून्य ही है। आपको याद होगा कि सामान्यतया $-\frac{p}{q}$ को $-\frac{p}{q}$ लिखा जाता है।

2.5 परिमेय संख्याओं का व्यवकलन

आपको याद होगा कि व्यवकलन, योग की सक्रियता का उल्टा अर्थात् प्रतिलोम (inverse) है। उदाहरणार्थ, मान लीजिए, यदि हम, $\frac{6}{5}$ में से $\frac{2}{5}$ घटाना चाहते हैं तो हम पूछते हैं, 'हम $\frac{6}{5}$ प्राप्त करने के लिए $\frac{2}{5}$ में क्या जोड़ें?' स्पष्टतया उत्तर $\frac{4}{5}$ है।

[सक्या रेखा पर 0 से 1 तक की दूरी 0.1 की पाँच समान रेखाखंडों OB , BC , CD , DE और EA में विभाजित कीजिए। तब B , $\frac{1}{5}$ निरूपित करता है तथा C , $\frac{2}{5}$ निरूपित करता है। $\frac{6}{5}$ को निरूपित करने वाला बिंदु अंकित कीजिए। यदि आप C से प्रारम्भ करें तो प्रत्येक पग OB (अर्थात् $\frac{1}{5}$) के बराबर लेकर आपको $\frac{6}{5}$ तक पहुँचने के लिए दाईं ओर कितने पग चलने पड़ेंगे?]

जाइए अब $\frac{2}{5}$ का ऋणात्मक ज्ञात करें और उसे $\frac{6}{5}$ में जोड़ें। हमें क्या प्राप्त

होता है ? $\frac{2}{5}$ का ऋणात्मक $-\frac{2}{5}$ है। इसे $\frac{6}{5}$ में जोड़ने से $\frac{4}{5}$ प्राप्त होता है। इस प्रकार,

$$\frac{6}{5} - \frac{2}{5} = \frac{6}{5} + \left(-\frac{2}{5}\right)$$

दूसरे शब्दों में, $\frac{6}{5}$ में से $\frac{2}{5}$ घटाने के लिए हम $\frac{6}{5}$ में $\frac{2}{5}$ का ऋणात्मक (अर्थात् योज्य प्रतिलोम) जोड़ते हैं। अर्थात्,

यदि $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ कोई दो परिमेय संख्याएँ हैं, तो $\frac{a}{b}$ में से $\frac{c}{d}$ घटाने का अर्थ है $\frac{a}{b}$ में $\frac{c}{d}$ का ऋणात्मक (अर्थात् योज्य प्रतिलोम) जोड़ना। इस प्रकार,

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \left(-\frac{c}{d}\right)$$

अब हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1: $\frac{5}{9}$ में से $\frac{3}{7}$ घटाइए।

हल: हम $\frac{5}{9}$ में $\frac{3}{7}$ का ऋणात्मक जोड़ते हैं और हमें निम्न प्राप्त होता है:

$$\begin{aligned} \frac{5}{9} - \frac{3}{7} &= \frac{5}{9} + \left(-\frac{3}{7}\right) = \frac{5 \times 7 + 9 \times (-3)}{9 \times 7} \\ &= \frac{35 - 27}{63} = \frac{8}{63} \end{aligned}$$

उदाहरण 2: $-\frac{4}{3}$ में से $\left(-\frac{16}{21}\right)$ घटाइए।

हल: $-\frac{16}{21}$ का ऋणात्मक $\frac{16}{21}$ है। इस प्रकार,

$$\begin{aligned} \frac{-4}{3} \div \left(\frac{16}{21} \right) &= \frac{-4}{3} \times \frac{21}{16} = \frac{(-4) \cdot 21}{3 \cdot 16} \\ &= \frac{84}{48} = \frac{36}{63} = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

प्रश्नावली 2.4

1. निम्न में से प्रत्येक परिमेय संख्या का कृणात्मक लिखिए

(i) $\frac{2}{7}$

(ii) $-\frac{3}{7}$

(iii) $-\frac{3}{7}$

(iv) $-\frac{2}{3}$

(v) $-\frac{5}{4}$

2. पढाइए :

(i) $-\frac{5}{9}$ में से $\frac{3}{7}$

(ii) $-\frac{5}{21}$ में से $\frac{9}{20}$

(iii) $-\frac{3}{10}$ में से 11

(iv) 5 में से $\frac{3}{17}$

(v) $\frac{20}{13}$ में से $\frac{7}{11}$

(vi) $-\frac{3}{4}$ में से $-\frac{3}{4}$

(vii) 0 में से $-\frac{5}{6}$

(viii) $-\frac{3}{8}$ में से 0

(ix) $\frac{198}{11}$ में से $-\frac{210}{121}$

(x) $\frac{237}{26}$ में से $-\frac{1017}{234}$

3. निम्न का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{1}{2} \div \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)$

(ii) $\left(-\frac{1}{2} - \frac{7}{9} \right) \div \frac{10}{13}$

$$(iii) \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{7} \right) - \frac{5}{7} \quad (iv) \left(\frac{9}{10} - \frac{7}{23} \right) + \frac{10}{31}$$

4. $\frac{9}{13}$ में से $\frac{11}{9}$ घटाइए। $\frac{11}{9}$ में से $\frac{9}{13}$ घटाइए। क्या

$$\frac{11}{9} - \frac{9}{13} = \frac{9}{13} - \frac{11}{9} \text{ है ?}$$

5. $\frac{7}{10} - \left(\frac{2}{11} - \frac{5}{7} \right)$ परिकलित कीजिए। $\left(\frac{7}{10} - \frac{2}{11} \right) - \frac{5}{7}$

परिकलित कीजिए। क्या

$$\frac{7}{10} - \left(\frac{2}{11} - \frac{5}{7} \right) = \left(\frac{7}{10} - \frac{2}{11} \right) - \frac{5}{7} \text{ है ?}$$

6. दो परिमेय संख्याओं का योग $\frac{16}{21}$ है। यदि इनमें से एक संख्या $\frac{116}{441}$ है तो दूसरी जान लीजिए।

7. विनय अपने मासिक वेतन का $\frac{2}{5}$ वां भाग खाने पर, $\frac{1}{10}$ वां भाग अपने दो बच्चों की शिक्षा पर तथा एक-चौथाई भाग किराए पर व्यय करता है। उसके वेतन का कितना भाग उसके पास शेष रहता है ?

मुख्य संकल्पनाएँ

परिमेय संख्याओं की समानता
घनात्मक और ऋणात्मक परिमेय
संख्याएँ
परिमेय संख्या का ऋणात्मक

निम्नतम पदों में परिमेय संख्याएँ
परिमेय संख्याओं का योग
परिमेय संख्याओं का व्यवकलन

परिमेय संख्याओं का गुणन एवं विभाजन

अब हम सीखेंगे कि परिमेय संख्याओं का गुणा और भाग किस प्रकार किया जाता है तथा साथ ही हम इन संक्रियाओं के गुणों का भी अध्ययन करेंगे। हम यह भी सीखेंगे कि परिमेय संख्याओं की तुलना किस प्रकार की जाती है।

3.1 परिमेय संख्याओं का गुणन

एकक II में हमने सीखा था कि परिमेय संख्याओं को किस प्रकार जोड़ा और घटाया जाता है तथा साथ ही हमने इन संक्रियाओं के गुणों का भी अध्ययन किया था। ये गुण हमारे लिए नए नहीं हैं। हम पहले ही देख चुके हैं कि धनपूर्णांकों और पूर्णांकों के योग और व्यवस्थन में भी यही गुण विद्यमान हैं।

आइए अब देखें कि परिमेय संख्याओं का गुणा और भाग किस प्रकार किया जाता है। हमें परिमेय संख्याओं का गुणन और विभाजन किस प्रकार परिभाषित करना चाहिए? हम इनको बिल्कुल इस प्रकार परिभाषित करना चाहेंगे कि इनमें भी वही गुण हों जो धनपूर्णांकों और पूर्णांकों के गुणन और विभाजन में हैं।

आसानी याद होगा कि पूर्णांकों के गुणन को बार-बार योग (repeated addition) समझा जा सकता है। आइए, परिमेय संख्याओं का गुणन परिभाषित करने के लिए, इसका अभिप्रेरण (motivation) के रूप में प्रयोग करें।

उदाहरणार्थ, 6 और $\frac{1}{2}$ के गुणन पर विचार कीजिए। यह समझते हुए कि यह बार-बार योग है, हम निम्न प्राप्त करते हैं:

$$6 \times \frac{3}{5} = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{18}{5}$$

इसी प्रकार,

$$3 \times \frac{4}{9} = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{12}{9},$$

$$7 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{7}{2},$$

इत्यादि। हम देखते हैं कि

$$6 \times \frac{3}{5} = \frac{6}{1} \times \frac{3}{5} = \frac{6 \times 3}{1 \times 5} = \frac{18}{5},$$

$$3 \times \frac{4}{9} = \frac{3}{1} \times \frac{4}{9} = \frac{12}{9},$$

$$7 \times \frac{1}{2} = \frac{7}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{2}, \text{ इत्यादि।}$$

इस प्रकार, गुणनफल ज्ञात करने के लिए हम प्रत्येक स्थिति में अंशों का गुणा करने हैं और हरों के गुणनफल से भाग दे देते हैं। ठीक इसी प्रकार से हम दो परिमेय संख्याओं का गुणन परिभाषित करेंगे। अर्थात्,

यदि $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ परिमेय संख्याएँ हैं, तो हम इनके गुणनफल को $\frac{a \times c}{b \times d}$

के रूप में परिभाषित करते हैं तथा निम्न प्रकार लिखते हैं :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} = \frac{\text{अंशों का गुणनफल}}{\text{हरों का गुणनफल}}$$

अब हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : गुणा कीजिए :

(i) 15 और $\frac{4}{11}$

(ii) 8 और $\frac{16}{7}$

(iii) 21 और $-\frac{13}{7}$

(iv) 32 और $\frac{102}{203}$

हल : हम केवल परिभाषा का प्रयोग करते हैं। इससे हमें निम्न गुणनफल प्राप्त होते हैं :

$$(i) 15 \times \frac{4}{11} = \frac{15 \times 4}{11} = \frac{60}{11}$$

$$(ii) 8 \times \frac{16}{7} = \frac{8 \times 16}{1 \times 7} = \frac{128}{7}$$

$$(iii) 21 \times \frac{13}{7} = 21 \times \left(\frac{-13}{7} \right) = \frac{-21 \times 13}{1 \times 7} = \frac{-273}{7}$$

हम देखते हैं कि अंश और हर में 7 उभयनिष्ठ है। अतः हम उभयनिष्ठ गुणनखंड को काट कर निम्न प्राप्त करते हैं :

$$\frac{273}{7} \times \frac{-7 \times 39}{7} = -39$$

$$(iv) 32 \times \frac{102}{203} = \frac{32 \times 102}{1 \times 203} = \frac{3264}{203}$$

उदाहरण 2 : गुणा कीजिए :

$$(i) \frac{8}{7} \text{ और } \frac{13}{27}$$

$$(ii) \frac{18}{25} \text{ और } \frac{-4}{41}$$

$$(iii) \frac{11}{8} \text{ और } \frac{88}{7}$$

$$(iv) \frac{-23}{29} \text{ और } \frac{-37}{19}$$

हल : पुनः हम केवल परिभाषा का प्रयोग करते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं :

$$(i) \frac{8}{7} \times \frac{13}{27} = \frac{8 \times 13}{7 \times 27} = \frac{104}{189}$$

$$(ii) \frac{18}{25} \times \frac{-4}{41} = \frac{18 \times (-4)}{25 \times 41} = \frac{-72}{1025}$$

$$(iii) \frac{11}{8} \times \frac{88}{7} = \frac{11 \times 88}{8 \times 7} = \frac{11 \times 8 \times 11}{8 \times 7} = \frac{11 \times 11}{1 \times 7} = \frac{121}{7}$$

$$(ii) \quad \frac{-23}{29} \div \frac{-37}{19} = \frac{(-23)}{29} \times \frac{19}{(-37)} = \frac{851}{551}$$

आपको याद होगा कि दो पूर्णाकों को हम चाहे जिस क्रम में गुणा करें उससे कुछ अंतर नहीं पड़ता। परिमेय संख्याओं के बारे में आप क्या सोचते हैं? क्या

$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$ है? निश्चय ही, ऐसा है, क्योंकि

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b} \quad (\text{क्यों?}) \quad \frac{c}{d} \div \frac{a}{b}$$

क्या आपको इस गुण का नाम याद है? हम कहते हैं कि परिमेय संख्याओं का गुणन क्रमविनिमेय है। परन्तु यह नाम इतना महत्वपूर्ण नहीं है। जो महत्वपूर्ण है वह है यह याद रखना कि दो परिमेय संख्याओं को हम चाहे जिस क्रम में गुणा करें उससे कुछ अंतर नहीं पड़ता। अर्थात्,

• यदि $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ कोई दो परिमेय संख्याएँ हैं, तो

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$$

हम एक उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 3: $-\frac{2}{3} \times \frac{4}{7}$ परिकलित कीजिए। जाँच कीजिए कि

$$\frac{-2}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{4}{7} \times \frac{-2}{3}$$

$$\text{हल: } \frac{-2}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{(-2) \times 4}{3 \times 7} = \frac{-8}{21}$$

$$\text{अब, } \frac{4}{7} \times \frac{-2}{3} = \frac{4 \times (-2)}{7 \times 3} = \frac{-8}{21}$$

$$\text{इस प्रकार, } \frac{-2}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{4}{7} \times \frac{-2}{3}$$

आइए अब निम्न उदाहरण का अध्ययन करें :

उदाहरण 4 : परिकल्पित कीजिए :

$$(i) 0 \cdot \frac{26}{35} \quad (ii) 0 \times \frac{-17}{21} \quad (iii) \frac{-211}{-356} \times 0$$

हम : गुणन की परिभाषा का प्रयोग करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$(i) 0 \cdot \frac{26}{35} = \frac{0 \cdot 26}{1 \cdot 35} = \frac{0}{35} = 0$$

$$(ii) 0 \times \frac{-17}{21} = \frac{0 \cdot (-17)}{21} = \frac{0}{21} = 0$$

$$(iii) \frac{-211}{-356} \cdot 0 = \frac{-211 \times 0}{-356} = \frac{0}{-356} = 0$$

हम देखते हैं कि शून्य और किसी भी परिमेय संख्या का गुणनफल शून्य है।

वास्तव में यह सरलता से सिद्ध किया जा सकता है कि यदि $\frac{p}{q}$ एक परिमेय संख्या है, तो

$$\frac{p}{q} \cdot 0 = 0 \quad \frac{p}{q} = 0$$

आपको याद होगा कि यही बात पूर्णाकों के लिए भी सत्य थी। अब 1 और किसी परिमेय संख्या के गुणनफल के बारे में आप क्या सोचते हैं? हम देखते हैं कि

$$1 \times \frac{11}{23} = \frac{1 \times 11}{1 \times 23} = \frac{11}{23},$$

$$\frac{11}{23} \times 1 = \frac{11 \times 1}{23 \times 1} = \frac{11}{23},$$

$$1 \times \left(\frac{-107}{113} \right) = \frac{1 \times (-107)}{1 \times 113} = \frac{-107}{113},$$

$$\left(\frac{-107}{113} \right) \times 1 = \frac{(-107) \times 1}{113 \times 1} = \frac{-107}{113}, \text{ इत्यादि।}$$

वास्तव में यह भी सरलता से सिद्ध हो सकता है कि यदि $\frac{p}{q}$ एक परिमेय संख्या है, तो

$$\frac{p}{q} \times 1 = 1 \times \frac{p}{q} = \frac{p}{q}$$

दूसरे शब्दों में, 1 और किसी परिमेय संख्या का गुणनफल स्वयं वह परिमेय संख्या ही होती है। यह 1 का गुणन गुण (multiplication property) कहलाता है, तथा 1 परिमेय संख्याओं के गुणन के लिए तत्समक अवयव कहलाना है।

अब यदि हमें तीन परिमेय संख्याओं का गुणा करना हो तो हम क्या करेंगे ? हमें कैसे प्रारम्भ करना चाहिए ? उदाहरणार्थ, परिमेय संख्याओं $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ और $-\frac{9}{11}$ पर विचार कीजिए। गुणनफल ज्ञात करने के लिए आप शायद पहले $\frac{2}{3}$ और $\frac{5}{6}$ का गुणा करेंगे और फिर इनके गुणनफल को $-\frac{9}{11}$ से गुणा करेंगे।

गुणनफल ज्ञात करने की इस विधि को निम्न प्रकार दर्शाया जा सकता है :

$$\left(\frac{2}{3} \times \frac{5}{6} \right) \times -\frac{9}{11} = \left(\frac{2 \times 5}{3 \times 6} \right) \times -\frac{9}{11} = \frac{10}{18} \times -\frac{9}{11} = -\frac{90}{198}$$

आइए अब देखें कि यदि हम $\frac{2}{3}$ को $\frac{5}{6}$ और $-\frac{9}{11}$ के गुणनफल से गुणा करें तो हमें क्या प्राप्त होता है। दूसरे शब्दों में, $\frac{2}{3} \times \left(\frac{5}{6} \times -\frac{9}{11} \right)$ क्या है ? हम देखते हैं कि

$$\frac{2}{3} \times \left(\frac{5}{6} \times -\frac{9}{11} \right) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{5 \times (-9)}{6 \times 11} \right) = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{45}{66} \right) = -\frac{90}{198}$$

इस प्रकार,

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 11 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$$

उपरोक्त उदाहरण में परिमेय संख्याओं के गुणन का एक अन्य महत्वपूर्ण गुण कि परिमेय संख्याओं का गुणन सहचारी होता है, स्पष्ट होता है। पुनः यह नाम इतना महत्वपूर्ण नहीं है। जो महत्वपूर्ण है वह है यह याद रखना कि किन्हीं तीन परिमेय संख्याओं का गुणनफल ज्ञात करने के लिए इससे कुछ अंतर नहीं पड़ता कि हम पहले कौन सी दो संख्याएँ लेकर गुणा करते हैं तथा फिर इनके गुणनफल को तीसरी बची हुई संख्या से गुणा करते हैं।

सकेंतों का प्रयोग करके हम परिमेय संख्याओं के गुणन के साहचर्य गुण को निम्न प्रकार व्यक्त कर सकते हैं :

यदि $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ और $\frac{e}{f}$ कोई तीन परिमेय संख्याएँ हों, तो

$$\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \right) \times \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} \times \frac{e}{f} \right)$$

उपरोक्त गुण के फलस्वरूप ही प्रायः हम इन समान गुणनफलों के स्थान पर

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} \left[\text{या} \left(\frac{a}{b} \right) \left(\frac{c}{d} \right) \left(\frac{e}{f} \right) \right] \text{ लिखते हैं।}$$

हम देखते हैं कि $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} = \frac{a \times c \times e}{b \times d \times f} = \frac{ace}{bdf}$ ।

आइए अब एक उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 5 : $-\frac{18}{5}$, $-\frac{262}{131}$ और $\frac{125}{46}$ का गुणा कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि

$$\begin{aligned} -\frac{18}{5} \times \left(-\frac{262}{131} \right) \times \frac{125}{46} &= \frac{18 \times (-262) \times 125}{(-5) \times 131 \times 46} \\ &= \frac{9 \times 2 \times (-2) \times 131 \times 5 \times 25}{(-5) \times 131 \times 23 \times 2} = \frac{9 \times 2 \times 25}{23} \\ &= \frac{450}{23} \end{aligned}$$

आइए अब देखें कि चार या अधिक परिमेय संख्याओं का किस प्रकार गुणा किया जाता है। हम गुणन के क्रमविनिमेय तथा साहचर्य गुणों का, यदि आवश्यक हो तो संभवतया कई बार, प्रयोग करते हैं। इस स्तर पर यह आवश्यक नहीं कि हम प्रत्येक पग पर इन गुणों का प्रयोग बताते जाएँ। जो सहृत्वपूर्ण है वह है इस प्रयोग का परिणाम। परिणाम है कि यदि कई परिमेय संख्याएँ दी हुई हों तो यह आवश्यक नहीं कि उन्हें उसी क्रम में गुणा किया जाए जिसमें वे दी हुई हैं। हम उनके किसी भी क्रम में समूह बना सकते हैं और उनका गुणनफल ज्ञात कर सकते हैं। इसे अब हम एक उदाहरण की सहायता से स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 6 : $\frac{5}{21}$, $-\frac{3}{40}$, -49 , $-\frac{16}{25}$ और $\frac{1}{11}$

का गुणा कीजिए।

$$\begin{aligned}
 \text{हल : } & \frac{5}{21} \times -\frac{3}{40} \times (-49) \times -\frac{16}{25} \times \frac{1}{11} \\
 &= \left[\left(\frac{5}{21} \times -\frac{3}{40} \right) \times (-49) \right] \times \left(-\frac{16}{25} \times \frac{1}{11} \right) \\
 &= \left[\left(\frac{-1}{7 \times 8} \right) \times (-49) \right] \times \left(-\frac{16 \times 1}{25 \times 11} \right) \\
 &= \left[-\frac{1}{8} \times (-7) \right] \times -\frac{16}{275} = \frac{7}{8} \times -\frac{16}{275} \\
 &= -\frac{14}{275}
 \end{aligned}$$

हम केवल अंशों का गुणा करके उनके गुणनफल में हरों के गुणनफल का भाग देकर भी उपर्युक्त गुणनफल ज्ञात कर सकते हैं। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{49} \left(\frac{16}{25} - \frac{1}{11} - \frac{5}{21} + \frac{3}{40} - \frac{49}{25} + \frac{16}{11} \right) \\
 &= \frac{-7}{25} + \frac{2}{11} = \frac{-14}{275}
 \end{aligned}$$

3.2 परिमेय संख्याओं के लिए वितरण गुण

अब मैं हम एक और महत्वपूर्ण गुण पर विचार करने हैं। आपको याद होगा कि पूर्णांकों के समुच्चय में गुणन योग पर वितरणात्मक होता है। अब, हम यह व्यापारिक प्रश्न पूछने हैं कि 'क्या परिमेय संख्याओं के समुच्चय में गुणन योग पर वितरणात्मक है?' हमारे शब्दों में, यदि $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ तथा

$\frac{e}{f}$ कोई तीन परिमेय संख्याएँ हैं तो क्या यह सत्य है कि

$$\frac{a}{b} \left[\frac{c}{d} + \frac{e}{f} \right] = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} ?$$

अब, उदाहरणार्थ, $\frac{1}{2} \left[\frac{4}{3} + \frac{3}{5} \right]$ परिकलित करें। हमें निम्न प्राप्त होगा है :

$$\frac{1}{2} \left[\frac{4}{3} + \frac{3}{5} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{4 \cdot 5 + 3 \cdot 3}{3 \cdot 5} \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{29}{15} = \frac{29}{30}$$

साथ ही,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{3} + \frac{3}{10} \\
 &= \frac{20}{30} + \frac{3}{10} = \frac{29}{30}
 \end{aligned}$$

हम प्रकार हम देखते हैं कि

$$\frac{1}{2} \left[\frac{4}{3} + \frac{3}{5} \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}$$

हम यह पाठक के अभ्यासार्थ छोड़ रहे हैं कि वह सिद्ध करें कि यदि

$\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ और $\frac{e}{f}$ कोई तीन परिमेय संख्याएँ हैं, तो

$$\frac{a}{b} \left[\frac{c}{d} + \frac{e}{f} \right] = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$$

प्रश्नावली 3.1

1. गुणा कीजिए :

(i) 3 और $\frac{7}{16}$

(ii) -11 और $\frac{29}{30}$

(iii) -5 और $-\frac{118}{57}$

(iv) 0 और $\frac{2003}{3005}$

(v) $-\frac{1102}{801}$ और 0

(vi) $\frac{730}{111}$ और 1

(vii) -1 और $\frac{730}{111}$

2. गुणा कीजिए :

(i) $\frac{3}{7}$ और $-\frac{9}{11}$

(ii) $-\frac{19}{20}$ और $-\frac{5}{4}$

(iii) $\frac{1072}{571}$ और $-\frac{8}{19}$

(iv) $\frac{5}{7}$ और $\frac{7}{5}$

(v) $-\frac{5}{7}$ और $-\frac{7}{5}$

(vi) $\frac{3592}{101}$ और $\frac{99}{3609}$

(vii) $-\frac{5250}{175}$ और $-\frac{275}{110}$

$$(ii) \frac{1}{7} \left[\frac{2}{3} + \frac{8}{9} \right] = \frac{1}{7} \left(\frac{2}{3} \right) + \frac{1}{7} \left(\frac{8}{9} \right)$$

*7. मान लीजिए $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ और $\frac{e}{f}$ कोई तीन परिमेय संख्याएँ हैं।

(i) $\frac{c}{d} + \frac{e}{f}$ मान कीजिए।

(ii) $\frac{a}{b} \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f} \right)$ परिकलित करने में (i) का प्रयोग कीजिए।

(iii) $\frac{a}{b} \left(\frac{c}{d} \right)$ तथा $\frac{a}{b} \left(\frac{e}{f} \right)$ परिकलित कीजिए।

(iv) जाँच कीजिए कि :

$$\frac{a}{b} \left[\frac{c}{d} + \frac{e}{f} \right] = \frac{a}{b} \left(\frac{c}{d} \right) + \frac{a}{b} \left(\frac{e}{f} \right)$$

8. मान ज्ञात कीजिए :

$$8 \left(\frac{1}{7} + \frac{2}{9} \right) + \frac{13}{21} = \frac{7}{260}$$

9. एक स्कूल को कक्षा VI में 24 विद्यार्थी हैं। कक्षा VII में विद्यार्थियों की संख्या कक्षा VI के विद्यार्थियों की संख्या की $\frac{5}{4}$ गुनी है। कक्षा VII में कितने विद्यार्थी हैं ?

10. एक किसान $\frac{15}{4}$ हेक्टेयर भूमि में गेहूँ उगाता है। यदि उसकी पैदावार $\frac{47}{2}$ किबटल प्रति हेक्टेयर है तो बताइए वह कितना गेहूँ पैदा करता है।

3.3 परिमेय संख्या का व्युत्क्रम

$$\frac{6}{13} \text{ का } \frac{13}{6} \text{ क्या है ?} \quad - \quad \frac{118}{275} \text{ का } \frac{275}{118} \text{ क्या है ?}$$

$$\frac{23}{1} \text{ का } \frac{1}{23} \text{ क्या है ?}$$

हम देखते हैं कि प्रत्येक स्थिति में गुणनफल 1 है। जब दो संख्याओं का गुणनफल 1 होना है तो हम कहते हैं कि प्रत्येक संख्या दूसरी का व्युत्क्रम (reciprocal) या गुणनात्मक प्रतिलोम (multiplicative inverse) है।

$$\frac{13}{6} \text{ का व्युत्क्रम } \frac{6}{13} \text{ है; } \frac{6}{13} \text{ का व्युत्क्रम } \frac{13}{6} \text{ है; } -\frac{275}{118} \text{ का व्युत्क्रम}$$

$$-\frac{118}{275} \text{ है; } -\frac{118}{275} \text{ का व्युत्क्रम } -\frac{275}{118} \text{ है; } \frac{1}{23} \text{ का व्युत्क्रम } 23$$

$$\text{है, } 23 \text{ का व्युत्क्रम } \frac{1}{23} \text{ है।}$$

(1) के अतिरिक्त प्रत्येक परिमेय संख्या का एक व्युत्क्रम होता है जो कि पुनः एक परिमेय संख्या ही होती है। हम किसी परिमेय संख्या का व्युत्क्रम कैसे ज्ञात करें? हमारे शब्दों में, यदि $\frac{a}{b}$ कोई परिमेय संख्या है तो एक अन्य ऐसी परिमेय संख्या, उदाहरणार्थ, $\frac{p}{q}$ कैसे ज्ञात की जाए कि

$$\frac{a}{b} \times \frac{p}{q} = 1 \text{ हो?} \quad (1)$$

आइए (1) के दोनों पक्षों को $\frac{b}{a}$ से गुणा करें। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\frac{b}{a} \times \frac{a}{b} \times \frac{p}{q} = \frac{b}{a} \times 1$$

$$\text{इस प्रकार,} \quad \frac{p}{q} = \frac{b}{a}$$

हमारे शब्दों में, किसी परिमेय संख्या का व्युत्क्रम उस संख्या के अंश को हर में तथा हर को अंश से बदल देने पर प्राप्त होता है।

[हम कभी-कभी कहते हैं कि परिमेय संख्या का व्युत्क्रम ज्ञात करने के लिए हम संख्या को 'उल्टा' कर देते हैं।]

उम प्रकार, $-\frac{23}{24}$ का व्युत्क्रम $-\frac{24}{23}$ या $-\frac{24}{23}$ है; 72 का व्युत्क्रम $\frac{1}{72}$ है; इत्यादि।

प्रश्नावली 3.2

1. निम्न में से प्रत्येक का व्युत्क्रम लिखिए :

(i) $\frac{5}{7}$ (ii) $-\frac{5}{7}$ (iii) $-\frac{11}{12}$

(iv) 1 (v) -1

2. निम्न संख्याओं को उनके व्युत्क्रमों से गुणा कीजिए :

(i) $\frac{7}{9}$ (ii) 4 (iii) $-\frac{11}{13}$

(iv) 1 (v) -1

3. $\frac{15}{17}$ को $-\frac{20}{3}$ के व्युत्क्रम से गुणा कीजिए।

4. $\frac{5}{6}$ और $-\frac{7}{8}$ के व्युत्क्रमों का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

3.4 परिमेय संख्याओं का विभाजन

अब हम सीखेंगे कि दो परिमेय संख्याओं का विभाजन किस प्रकार परिभाषित किया जाता है। आपको याद होगा कि विभाजन, गुणन का प्रतिलोम है। हम इसका परिमेय संख्याओं के विभाजन को परिभाषित करने के लिए अविभरण के रूप में प्रयोग करेंगे। उदाहरणार्थ, $\frac{3}{4}$ के $\frac{6}{13}$ से विभाजन पर

विचार कीजिए। हम पूछते हैं, " $\frac{3}{4}$ प्राप्त करने के लिए हम $\frac{6}{13}$ में किसका गुणा करें?"

मान लीजिए हम संख्या $\frac{c}{d}$ से गुणा करते हैं।

$$\text{तब,} \quad \frac{6}{13} \times \frac{c}{d} = \frac{3}{4} \quad (1)$$

(1) के दोनों पक्षों को $\frac{13}{6}$ से गुणा करने पर,

$$\frac{13}{6} \times \frac{6}{13} \times \frac{c}{d} = \frac{13}{6} \times \frac{3}{4}$$

$$\text{इस प्रकार, } \frac{c}{d} = \frac{3}{4} \times \frac{13}{6} = \frac{3}{4} \times \left(\frac{6}{13} \text{ का व्युत्क्रम} \right)$$

अर्थात् $\frac{3}{4}$ को $\frac{6}{13}$ से विभाजित करने के लिए हम $\frac{3}{4}$ को $\frac{6}{13}$ के व्युत्क्रम से गुणा करते हैं। वास्तव में ठीक इसी प्रकार से हम परिमेय संख्याओं का विभाजन परिभाषित करेंगे। अर्थात्,

यदि $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ ($\frac{c}{d} \neq 0$) परिमेय संख्याएँ हैं, तो $\frac{a}{b}$ को $\frac{c}{d}$ से विभाजित करने का अर्थ वही है जो $\frac{a}{b}$ को $\frac{d}{c}$ से गुणा करने का (अर्थात् $\frac{a}{b}$ को $\frac{c}{d}$ के व्युत्क्रम से गुणा करने का) है। हम इसे निम्न प्रकार लिखते हैं :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \quad .$$

पूर्णाकों की तरह परिमेय संख्याओं में भी शून्य से विभाजन परिभाषित नहीं है।

अब हम इस परिभाषा का प्रयोग स्पष्ट करने के लिए एक या दो उदाहरणों पर विचार करने हैं।

उदाहरण 1: $\frac{16}{21}$ को $\frac{343}{40}$ से भाग दीजिए।

हल: $\frac{343}{40}$ का व्युत्क्रम $\frac{40}{343}$ है।

$$\text{इस प्रकार, } \frac{16}{21} \div \frac{343}{40} = \frac{16}{21} \times \frac{40}{343} = \frac{640}{7203}$$

उदाहरण 2: $\frac{17}{24} \div \frac{51}{480}$ परिकल्पित कीजिए।

हल: हम देखते हैं कि

$$\begin{aligned} \frac{17}{24} \div \frac{51}{480} &= \frac{17}{24} \times \frac{480}{51} = \frac{17}{24} \times \frac{24 \times 20}{17 \times 3} \\ &= \frac{20}{3} \end{aligned}$$

आपको याद होगा कि हमें परिमेय संख्याएँ प्रविष्ट करने की आवश्यकता इस लिए पड़ी क्योंकि हमने देखा कि हम एक पूर्णांक को सबसे एक (शून्येतर) पूर्णांक से विभाजित करने में समर्थ नहीं थे। अब हमारे पास परिमेय संख्याएँ हैं, इसलिए ऐसा करना सदैव संभव है। क्योंकि यदि a और b कोई पूर्णांक इस प्रकार हैं कि $b \neq 0$ है, तो

$$a \div b = \frac{a}{1} \div \frac{b}{1} = \frac{a}{1} \times \frac{1}{b} = \frac{a \times 1}{1 \times b} = \frac{a}{b}$$

इस प्रकार, यदि a और b पूर्णांक हैं तथा $b \neq 0$ है, तो $a \div b$ का अर्थ है परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$ । उदाहरणार्थ, $9 \div 4 = \frac{9}{4}$, $12 \div 7 = \frac{12}{7}$, इत्यादि।

प्रश्नावली 3.3

1 निम्न विभाजन कीजिए तथा तदनुरूपी गुणन से अपने उत्तर की जाँच कीजिए :

$$(i) \quad \frac{3}{7} \div \frac{9}{11}$$

$$(ii) \quad \frac{4}{9} \div \frac{9}{4}$$

$$(iii) \quad \frac{11}{13} \div \frac{-5}{6}$$

$$(iv) \quad \frac{2}{25} \div \frac{-2}{25}$$

$$(v) \quad \frac{-7}{16} \div \frac{18}{-7}$$

$$(vi) \quad 114 \div \frac{38}{5}$$

$$(vii) \quad \frac{24}{7} \div \frac{61}{8}$$

$$(viii) \quad \frac{9261}{1035} \div \frac{341}{207}$$

$$(ix) \quad -306 \div \frac{103}{-4}$$

2 दो उदाहरणों की सहायता से दिखाइए कि यदि $\frac{p}{q}$ और $\frac{r}{s}$ परिमेय संख्याएँ

$$\text{हैं, तो } \frac{p}{q} \div \frac{r}{s} \neq \frac{r}{s} \div \frac{p}{q} \text{ ।}$$

3 परिकल्पित कीजिए :

$$(i) \quad \left(\frac{7}{3} \div \frac{10}{9} \right) \times \frac{5}{11}$$

$$(ii) \quad \frac{-108}{27} \div \left(\frac{9}{11} \times \frac{18}{17} \right)$$

$$(iii) \quad -\frac{100}{245} \div \left(\frac{125}{64} \div \frac{-45}{48} \right)$$

$$(iv) \quad \left[\left(\frac{5}{9} \times \frac{3}{7} \right) \div \frac{8}{21} \right] \times \frac{-3}{5}$$

4. $\frac{3703}{1231}$ को दो संख्याओं के गुणा के रूप में व्यक्त कीजिए जबकि इनमें से एक

$$\text{संख्या } \frac{161}{11} \text{ हो ।}$$

5 $\left(\frac{2}{5} - \frac{4}{7}\right) - \frac{1}{2}$ ज्ञान कीजिए : क्या ही, $\frac{2}{5} \div \left(\frac{4}{7} - \frac{1}{2}\right)$ भी ज्ञान कीजिए । क्या ये समान है ?

3.5 परिमेय संख्याओं में क्रम सम्बन्ध

हम देख चुके हैं कि परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर किस प्रकार निरूपित किया जाता है । हम यह तब कह सकते हैं कि एक परिमेय संख्या दूसरी परिमेय संख्या से छोटी (या बड़ी) है ? आपको याद होगा कि पूर्णांक 'a' (अर्थात् परिमेय संख्या $\frac{a}{1}$) पूर्णांक 'b' (अर्थात् परिमेय संख्या $\frac{b}{1}$) से बड़ा होता है यदि संख्या रेखा पर 'a', 'b' के दाईं ओर स्थित हो ।

हम इसका परिमेय संख्याओं में क्रम-सम्बन्ध (ordering) परिभाषित करने में अभिप्रेरण के रूप में प्रयोग करेंगे । हम कहते हैं कि एक परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ दूसरी परिमेय संख्या $\frac{r}{s}$ से बड़ी होती है यदि संख्या रेखा पर $\frac{p}{q}$ (को निरूपित करने वाला बिंदु), $\frac{r}{s}$ (को निरूपित करने वाले बिंदु) के दाईं ओर स्थित हो । हम इसे $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$ लिखते हैं । दूसरे शब्दों में, इसे यह भी कहा जा सकता है कि एक परिमेय संख्या $\frac{r}{s}$ दूसरी परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ से छोटी होती है यदि संख्या रेखा पर $\frac{r}{s}$, $\frac{p}{q}$ के बाईं ओर स्थित हो । हम इसे $\frac{r}{s} < \frac{p}{q}$ लिखते हैं ।

अतः स्पष्ट है कि एक अनात्मक परिमेय संख्या एक आभात्मक परिमेय संख्या से सदैव बड़ी होती है । साथ ही, प्रत्येक आभात्मक परिमेय संख्या से बड़ा तथा प्रत्येक अनात्मक परिमेय संख्या से छोटा होता है ।

परन्तु परिमेय संख्याओं की तुलना करने के लिए हमें सदैव संख्या रेखा खींचने की ही आवश्यकता नहीं पड़नी चाहिए। अन्य किस प्रकार से हम परिमेय संख्याओं की तुलना कर सकते हैं? मान लीजिए $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$ है। तब संख्या रेखा पर $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$ के बाईं ओर स्थित होगा। दूसरे शब्दों में, हमें $\frac{p}{q}$ पर 'घुंघने' के लिए $\frac{r}{s}$ में कोई अनात्मक संख्या जोड़नी पड़ेगी। अतः ज्यामितीय निरूपण से हमें एक संकेत मिलता है। हम कहते हैं कि $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$ होगा यदि $\frac{p}{q} - \frac{r}{s}$ अनात्मक हो। परन्तु यदि $\frac{p}{q} - \frac{r}{s}$ अनात्मक हो तो हम कहते हैं कि $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ है।

अब हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1: परिमेय संख्याओं $\frac{2}{7}$ और $\frac{3}{11}$ में कौन सी संख्या बड़ी है?

हल: हम देखते हैं कि $\frac{2}{7} - \frac{3}{11} = \frac{2 \times 11 - 7 \times 3}{7 \times 11} = \frac{1}{7 \times 11}$, जो अनात्मक है।

इस प्रकार, $\frac{2}{7} > \frac{3}{11}$

आइए इस पर एक दूसरे दृष्टिकोण से विचार करें।

हम देखते हैं कि $\frac{2}{7} = \frac{2 \times 11}{7 \times 11} = \frac{22}{77}$ तथा, $\frac{3}{11} = \frac{3 \times 7}{11 \times 7} = \frac{21}{77}$

हम यह भी देखते हैं कि वही हुई परिमेय संख्याओं के हर अनात्मक हैं। इस प्रकार यदि हम वही हुई संख्याओं को समान अनात्मक हरों वाली संख्याओं के

रूप में लिख सकें तो हमें केवल अंशों के क्रम-सम्बन्ध की ही जाँच करनी पड़ेगी। परिमेय संख्याओं में यह ही क्रम-सम्बन्ध होगा। चूँकि $22 > 21$ है, अतः

$$\frac{2}{7} > \frac{3}{11}$$

उदाहरण 2 : परिमेय संख्याओं $-\frac{5}{7}$ और $-\frac{2}{3}$ में कौन सी संख्या बड़ी है?

हम : हम जानते हैं कि $-\frac{5}{7} = -\frac{5}{7}$

$$\begin{aligned} \text{इस प्रकार, } -\frac{5}{7} - \frac{(-2)}{3} &= -\frac{5}{7} - \frac{(-2)}{3} = \frac{(-5) \times 3 - (-2) \times 7}{7 \times 3} \\ &= \frac{-1}{21}, \text{ जो ऋणात्मक है।} \end{aligned}$$

$$\text{इस प्रकार, } -\frac{5}{7} < -\frac{2}{3} \text{ अथवा } -\frac{2}{3} > -\frac{5}{7}$$

पुनः आइए इस पर एक दूसरे दृष्टिकोण से विचार करें।

$$\begin{aligned} \text{हम देखते हैं कि } -\frac{5}{7} &= -\frac{5}{7} = \frac{(-5) \times 3}{7 \times 3} = -\frac{15}{21} \\ \text{तथा } -\frac{2}{3} &= \frac{(-2) \times 7}{3 \times 7} = -\frac{14}{21} \end{aligned} \quad \begin{array}{c} > \\ < \end{array}$$

चूँकि $-15 < -14$ है, अतः $-\frac{5}{7} < -\frac{2}{3}$ । इस प्रकार, यदि हम परिमेय संख्याओं को समान घनात्मक हरों वाली संख्याओं के रूप में लिख लें तो हमें वास्तव में बटाने की कोई आवश्यकता नहीं रहेगी। हम कहते हैं कि यदि $q > 0$, $s > 0$ तथा $ps > qr$ है तो $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$ । परन्तु यदि $q > 0$, $s > 0$ तथा $ps < qr$ है तो हम कहते हैं कि $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ । पुनः आइए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 3 : परिमेय संख्याओं $\frac{13}{12}$ और $\frac{17}{16}$ में कौन सी संख्या बड़ी है ?

हल : हम देखते हैं कि

$$\begin{array}{l} \frac{13}{12} = \frac{13 \times 16}{12 \times 16} = \frac{208}{12 \times 16} \\ \frac{17}{16} = \frac{17 \times 12}{16 \times 12} = \frac{204}{12 \times 16} \end{array} \quad \begin{array}{l} \searrow \\ \nearrow \end{array} >$$

तथा,

चूँकि $208 > 204$ है, अतः $\frac{13}{12} > \frac{17}{16}$ है।

उदाहरण 4 : $-\frac{7}{10}$, $-\frac{5}{8}$ और $-\frac{2}{3}$ को आरोही क्रम (increasing order) में लिखिए।

हल : हम देखते हैं कि

$$\begin{aligned} -\frac{7}{10} &= \frac{(-7) \times 8 \times 3}{10 \times 8 \times 3} = \frac{-168}{10 \times 8 \times 3}, \\ -\frac{5}{8} &= \frac{-5}{8} = \frac{(-5) \times 10 \times 3}{8 \times 10 \times 3} = \frac{-150}{10 \times 8 \times 3}, \\ -\frac{2}{3} &= \frac{-2}{3} = \frac{(-2) \times 10 \times 8}{3 \times 10 \times 8} = \frac{-160}{10 \times 8 \times 3}. \end{aligned}$$

तथा

अब हम केवल अंशों को आरोही क्रम में लिखते हैं तथा परिमेय संख्याओं का यही क्रम होगा। अंशों को आरोही क्रम में लिखने पर,

$$-168 < -160 < -150$$

$$\text{इस प्रकार, } -\frac{7}{10} < -\frac{2}{3} < -\frac{5}{8}$$

3.6 निरपेक्ष मान

पूर्णाकों की तरह किसी परिमेय का निरपेक्ष मान (absolute value) उसके चिन्ह को छोड़ते हुए वह संख्या ही होता है। संख्या का निरपेक्ष मान

दर्शाते हैं। हम उस संख्या को दो ऊँचाईय अर्थात् खड़ी रेखाओं ' $|$ ' के बीच में लिखते हैं।

इस प्रकार, $\frac{13}{25}, \frac{13}{25}, \frac{6}{217}, \frac{6}{217}, \left| \frac{18}{-47} \right| = \frac{18}{47}$, इत्यादि।

चूँकि परिमेय संख्या 0 न तो घनात्मक है और न ही ऋणात्मक, अतः हम कहते हैं कि शून्य का निरपेक्ष मान शून्य है। हम इसे $|0| = 0$ लिखते हैं।

प्रश्नावली 3.4

- 1 निम्न में से प्रत्येक परिमेय संख्याओं के युग्म में निर्धारित कीजिए कि कौन-सी संख्या बड़ी है :

$$(i) -\frac{5}{8}, \frac{3}{11}$$

$$(ii) -\frac{5}{8}, -\frac{2}{3}$$

$$(iii) \frac{7}{25}, -\frac{5}{7}$$

$$(iv) 0, -\frac{2}{3}$$

$$(v) \frac{120}{110}, \frac{121}{111}$$

$$(vi) -\frac{7}{6}, -\frac{8}{7}$$

- 2 निम्न को अवरोही क्रम (decreasing order) में लिखिए :

$$-\frac{10}{9}, -\frac{8}{7}, -\frac{8}{3}, \frac{5}{2}, \frac{11}{10}$$

- 3 निम्न को आरोही-क्रम (increasing order) में लिखिए :

$$\frac{5}{7}, -\frac{5}{4}, \frac{8}{11}, -\frac{7}{6}, \frac{9}{-5}, -\frac{6}{5}$$

- 4 निम्न में से प्रत्येक के निरपेक्ष मान लिखिए :

$$\frac{18}{39}, -\frac{233}{457}, \frac{131}{-202}, 0, -\frac{162}{961}$$

3.7 परिमेय संख्याओं का एक महत्वपूर्ण गुण

आपको याद होगा कि घनपूर्णांकों 1, 2, 3, 4, ... में एक बहुत ही 'सुन्दर' गुण कि प्रत्येक घनपूर्णांक का एक आसन्न परवर्ती (immediate successor) होता है विद्यमान है। पूर्णांकों में भी यह 'सुन्दर' गुण विद्यमान है। दूसरे शब्दों में, यदि कोई पूर्णांक, उदाहरणार्थ, —23 दिया हो तो हम जानते हैं कि —22 इसका आसन्न परवर्ती है। परिमेय संख्याओं के बारे में आप क्या सोचते हैं? यदि एक परिमेय संख्या दी हुई हो तो क्या हम उसका आसन्न परवर्ती बता सकते हैं? हम देखेंगे कि इस प्रश्न का उत्तर है: नहीं! हम यह दिखाएँगे कि यदि हम दो परिमेय संख्याएँ लें चाहे वे परस्पर कितनी ही निकट हों हम उनके बीच में सर्वत्र एक परिमेय संख्या ज्ञात कर सकते हैं। उदाहरणार्थ, संख्याओं $\frac{3}{5}$ और $\frac{2}{9}$ को लीजिए। हम देखते हैं कि $\frac{3}{5} > \frac{2}{9}$ है। (क्यों?)

अब आइए इन दोनों संख्याओं का औसत* (average) ज्ञात करें। हमें $\frac{\frac{3}{5} + \frac{2}{9}}{2}$ अर्थात् $\frac{37}{90}$ औसत के रूप में प्राप्त होता है। हम दिखायेंगे कि $\frac{37}{90}$, $\frac{2}{9}$ और $\frac{3}{5}$ के बीच में स्थित है। दूसरे शब्दों में, हम यह दिखाएँगे कि $\frac{2}{9} < \frac{37}{90}$ तथा $\frac{37}{90} < \frac{3}{5}$ है।

क्या $\frac{2}{9} < \frac{37}{90}$ है? हाँ, क्योंकि $2 \times 90 < 9 \times 37$ है।

*दो संख्याओं a और b का औसत उनके योग का आधा अर्थात् $\frac{a+b}{2}$ होता है।

इस प्रकार, $\frac{2}{9} < \frac{37}{90}$ ।

इसी प्रकार हम दिखा सकते हैं कि $\frac{37}{90} < \frac{3}{5}$ ।

इस प्रकार हमने $\frac{2}{9}$ और $\frac{3}{5}$ के बीच में एक संख्या $\frac{37}{90}$ ज्ञात कर ली। हम इस

औसत की विधि का ही प्रयोग करके $\frac{2}{9}$ और $\frac{37}{90}$ के बीच एक परिमेय संख्या

तथा $\frac{37}{90}$ और $\frac{3}{5}$ के बीच एक परिमेय संख्या ज्ञात कर सकते हैं। वास्तव में इस प्रक्रिया का कोई अंत ही नहीं है। अतः हमें परिमेय संख्याओं का एक बहुत ही महत्वपूर्ण गुण प्राप्त होता है जो निम्न है :

दो (भिन्न) परिमेय संख्याओं के बीच में हम सर्वत्र एक अन्य परिमेय संख्या ज्ञात कर सकते हैं।

[इस स्वीकृत कथन की उपपत्ति (proof) परिशिष्ट I में दी गई है।]

इस प्रकार हम आसन्न परवर्ती के जर्न में शब्द 'अगली' परिमेय संख्या की कल्पना भी नहीं कर सकते।

प्रश्नावली 3.5

1. $\frac{5}{12}$ और $\frac{3}{7}$ के बीच एक परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।
2. $\frac{2}{9}$ और $\frac{37}{90}$ के बीच एक परिमेय संख्या तथा $\frac{37}{90}$ और $\frac{3}{5}$ के बीच एक परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।
3. $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{4}$ के बीच कोई पाँच परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

4 क्या $8, \frac{32}{3}$ और $\frac{32}{5}$ के बीच स्थित है ?

मुख्य संकल्पनाएँ

गुणन	निरपेक्ष मान
परिमेय संख्या का व्युत्क्रम (या गुणनात्मक प्रतिलोम)	किन्हीं दो (भिन्न) परिमेय संख्याओं के बीच में हम सर्वत्र एक अन्य परिमेय संख्या ज्ञात कर सकते हैं
विभाजन	
परिमेय संख्याओं में क्रम-सम्बन्ध	

5. परिमेय संख्याओं के निम्न युग्मों का योग ज्ञात करने के लिए मध्या रेखा का प्रयोग कीजिए :

$$(i) \frac{5}{6}, \frac{13}{6}$$

$$(ii) \frac{5}{6}, -\frac{13}{6}$$

$$(iii) -\frac{5}{6}, \frac{13}{6}$$

$$(iv) -\frac{5}{6}, -\frac{13}{6}$$

6. निम्न में से प्रत्येक में योग ज्ञात कीजिए :

$$(i) \frac{11}{13}, \frac{13}{11}$$

$$(ii) -\frac{129}{10}, -\frac{17}{20}$$

$$(iii) -\frac{125}{30}, \frac{150}{35}$$

$$(iv) \frac{3}{100}, -\frac{5}{200}, \frac{7}{300}$$

$$(v) 9, \frac{11}{17}, \frac{12}{5}$$

$$(vi) \frac{23}{9}, -\frac{15}{20}, \frac{1}{90}, -\frac{2}{180}$$

7. परिकल्पित कीजिए :

$$(i) \frac{15}{11} + \frac{5}{11} - \frac{6}{11}$$

$$(ii) -\frac{6813}{90} + \frac{105}{21} + \frac{3}{10} - \frac{1}{5}$$

$$(iii) \frac{7}{16} \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} \right)$$

$$(iv) \frac{5}{3} - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{5}{7} \right)$$

$$(v) \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{2} \right) + \frac{2}{5} + \frac{5}{7}$$

$$(ii) \frac{25}{42} \left(\frac{13}{39} + \frac{18}{6} \right) \left[\frac{324}{405} \left(\frac{576}{144} + -\frac{22}{330} \right) \right]$$

8. पटाटा :

$$(i) \frac{6}{19} \text{ में से } \frac{18}{5}$$

$$(ii) -3 \text{ में से } \frac{512}{128}$$

$$(iii) \frac{87}{174} \text{ में से } -\frac{4662}{6660}$$

9. दो परिमेय संख्याओं का योग $\frac{10}{3}$ है। यदि इनमें से एक $-\frac{1}{3}$ है, तो दूसरी जान लीजिए।

10. दो परिमेय संख्याओं का योग $\frac{21}{43}$ है। यदि इनमें से एक $-\frac{11}{129}$ है, तो दूसरी जान लीजिए।

11. निम्न को गुणा कीजिए।

$$(i) \frac{5}{8} \text{ और } \frac{64}{25}$$

$$(ii) \frac{18}{5} \text{ और } \frac{16}{19}$$

$$(iii) \frac{23}{7} \text{ और } -\frac{25}{7}$$

$$(iv) -\frac{7392}{27} \text{ और } -\frac{5005}{9009}$$

$$(v) \frac{67851}{105}, \frac{21}{105} \text{ और } 63 \quad (vi) \frac{7308}{126}, 0, \frac{12609}{7308} \text{ और } \frac{252}{121}$$

12. निम्न में से प्रत्येक के पक्ष में दो उदाहरण दीजिए :

(i) दो धनात्मक परिमेय संख्याओं का गुणनफल एक धनात्मक परिमेय संख्या होती है।

(ii) एक धनात्मक और एक ऋणात्मक परिमेय संख्या का गुणनफल एक ऋणात्मक परिमेय संख्या होती है।

(iii) यदि $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ और $\frac{e}{f}$ कोई तीन परिमेय संख्याएँ हों, तो

$$\frac{a}{b} \div \left(\frac{c}{d} - \frac{e}{f} \right) = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \times \frac{e}{f}$$

13. दो परिमेय संख्याओं का गुणनफल $\frac{121}{49}$ है तथा इनमें से एक संख्या $\frac{13915}{637}$ है। दूसरी संख्या ज्ञात कीजिए।

14. निम्न में से प्रत्येक को परिकल्पित कीजिए :

$$\begin{aligned} (i) \quad & \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \div \frac{5}{7} & (ii) \quad & \left[\frac{12}{13} + \left(\frac{7}{9} - \frac{28}{117} \right) \right] \div \frac{57}{13} \\ (iii) \quad & \frac{16}{5} \times \frac{24}{13} - \frac{16}{5} \times \frac{11}{13} & (iv) \quad & \left[\left(\frac{6}{7} \times \frac{21}{23} \right) - \frac{35}{161} \right] \div \frac{101}{161} \\ (v) \quad & \left[\frac{25}{24} - \left(\frac{5}{8} \times \frac{5}{3} \right) \right] \times \frac{11913}{27054} \end{aligned}$$

15. $\frac{217}{192}$ को $\frac{-31}{48}$ के व्युत्क्रम से गुणा कीजिए।

16. $\frac{-35}{24}$ और $\frac{17}{-13}$ के गुणनफल को $\frac{85}{156}$ के व्युत्क्रम से गुणा कीजिए।

17. निम्न विभाजन कीजिए और तदनुरूपी गुणन की सहायता से अपने उत्तर की जाँच कीजिए :

$$\begin{aligned} (i) \quad & \frac{17}{21} \div \frac{7}{204} & (ii) \quad & \frac{23}{75} \div \frac{92}{-25} \\ (iii) \quad & \frac{-13013}{11} \div 13 & (iv) \quad & \frac{-102}{230} \div \frac{51}{-23} \\ (v) \quad & -1170 \div \frac{26}{750} \end{aligned}$$

18. निम्न परिष्कृत सख्याओं के युग्मों में से प्रत्येक युग्म में ज्ञात कीजिए कि कौन-सी सख्या छोटी है :

$$(i) \frac{7}{8}, \frac{8}{9}$$

$$(ii) \frac{19}{20}, \frac{20}{21}$$

$$(iii) \frac{15}{16}, \frac{14}{15}$$

$$(iv) -\frac{117}{108}, -\frac{126}{125}$$

19. निम्न स्थान पर उपयुक्त संकेत '<' या '>' या '=' भरिए ताकि निम्न में से प्रत्येक कथन सत्य हो :

$$(i) \frac{9}{10} \quad \frac{7}{8}$$

$$(ii) \frac{7}{16} \dots \frac{5}{11}$$

$$(iii) \frac{5}{13} \dots \frac{3}{7}$$

$$(iv) -\frac{7}{13} \dots -\frac{21}{39}$$

20. निम्न को आरोही-क्रम में लिखिए :

$$\frac{5}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{10}, -\frac{7}{4}$$

21. निम्न को अवरोही-क्रम में लिखिए :

$$3, \frac{25}{6}, \frac{7}{18}, \frac{5}{2}, \frac{17}{4}, -\frac{17}{33}, -\frac{28}{44}$$

22. निम्न में से प्रत्येक का निरपेक्ष मान लिखिए :

$$\frac{19}{11}, -\frac{19}{11}, -\frac{19}{11}, -\frac{19}{11}$$

23. -5 और 5 के बीच में कितने पूर्णांक हैं ?

24. 5 और 5 के बीच में कितनी परिमेय संख्याएँ हैं ? ऐसी कोई तीन परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए ।
25. $\frac{21}{23}$ और 0 के बीच में कोई दो परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए ।
26. निम्न कथन के पक्ष में दो उदाहरण दीजिए :
 "यदि $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ और $\frac{e}{f}$ तीन परिमेय संख्याएँ हैं तथा $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ और $\frac{c}{d} > \frac{e}{f}$, तो $\frac{a}{b} > \frac{e}{f}$ ।"
27. q के पूर्णांक मान (integer values) ज्ञात कीजिए ताकि $\frac{3}{q}$ एक धन-पूर्णांक हो ।
28. s के पूर्णांक मान ज्ञात कीजिए ताकि $\frac{3}{s}$ एक पूर्णांक हो ।

दशमलवों का अंकगणित

यह एक पुनरावलोकन एकक है। यह कल्पना की गई है कि आप दशमलवों (decimals) के अंकगणित से पहले से ही परिचित हैं। हम नीचे पुनरावलोकन हेतु एक प्रश्नावली दे रहे हैं जिससे उपर्युक्त संबंध में जो कुछ आपने पढ़ा है आप उसका स्मरण कर सकें। यदि आप किसी भी संकल्पना में कठिनाई अनुभव करते हैं तो आप अपनी पिछली कक्षाओं में अध्ययन की गई पाठ्य-सामग्री को पढ़ें।

प्रश्नावली 4.1

1. स्थानीय मान (place value) का सिद्धांत बहुत सुन्दरता के साथ दशमलवों के लिए भी लागू किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, 302.23 को प्रसारित संकेतन (expanded notation) में इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$302.23 = 3 \times 10^2 + 0 \times 10 + 2 \times 1 + 2 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{10^2}$$

निम्न दशमलवों को प्रसारित संकेतन में लिखिए :

(i) 3.5

(ii) 28.37

(iii) 215.532

(iv) 1501.013

(v) 2395.22037

(vi) 999.99190

2. निम्न में से प्रत्येक दशमलव को एक भिन्न के रूप में लिखिए :

(i) 71.2

(ii) 19.08

(iii) 113.004

(iv) 0.0037

(v) 978.0352

3. निम्न दशमलवों को आरोही-क्रम में लिखिए :

(i) 19.3, 18.892, 19.05, 18.8922

(ii) 0.09, 0.1, 0.099, 1.001, 0.937

(iii) 5.2, 5.02, 5.002, 5.19, 5.119, 5.219

4. निम्न दशमलवों को अवरोही-क्रम में लिखिए :

(i) 0.01, 1.01, 0.10, 0.001, 1.001

(ii) 1103.01, 999.099, 1103.001, 110.3001

(iii) 23.925, 22.9925, 23.9249, 23.92249, 23.9255

5. निम्न में से प्रत्येक में योग ज्ञात कीजिए :

(i) 2.35, 7.328

(ii) 11.19, 3, 2.684

(iii) 91.825, 101.025, 233.1346, 16.83572, 21

(iv) 201.351, 3.8, 0.40511, 91.52, 12359.2

(v) 1301.372, 2705.92301, 525.001, 3792.5002, 1621.340, 0.00038

6. निम्न संक्रियाएँ कीजिए :

(i) $0.0573 + 0.7237 + 5.7324 - 6.81$

(ii) $0.03297 - 4.7249$

(iii) $-19.152 - 29.3 + 108 - 314.2468$

(iv) $0.7291 - 0.5219 + 7.3216 - 237.253 + 0.00001$

(v) $23.017 - 19.9312 + 307.8 - 14 + 0.200004$

7 निम्न भिन्नो को दशमलवों में बदलिए :

$$(i) \frac{3}{4}$$

$$(ii) \frac{43}{5}$$

$$(iii) \frac{123}{20}$$

$$(iv) \frac{405}{8}$$

$$(v) \frac{1}{10}$$

$$(vi) \frac{1}{100}$$

$$(vii) \frac{1}{200}$$

$$(viii) \frac{3501}{4}$$

8. निम्न में से प्रत्येक का गुणनफल ज्ञात कीजिए :

$$(i) 4 \text{ और } 3.2$$

$$(ii) -5 \text{ और } 7.03$$

$$(iii) 21.01 \text{ और } 0.24$$

$$(iv) 4.75 \text{ और } 20$$

$$(v) 0.8193, 1200 \text{ और } 6.852$$

$$(vi) 7.5, 30.25, 125.25 \text{ और } 10$$

$$(vii) 0.687, 0.0032, 0.000345 \text{ और } 4$$

9. 10 या 10 की घातों से दशमलवों के गुणन का नियम बताइए ।

10. भाग कीजिए :

$$(i) 18.04 \text{ को } 4 \text{ से}$$

$$(ii) 9.0375 \text{ को } 0.25 \text{ से}$$

$$(iii) 380.019 \text{ को } 0.19 \text{ से}$$

$$(iv) 0.125 \text{ को } 25 \text{ से}$$

$$(v) 22.05 \text{ को } 0.00021 \text{ से}$$

$$(vi) 4.6728 \text{ को } 0.0032 \text{ से}$$

$$(vii) 2072.616 \text{ को } 284.7 \text{ से}$$

11. 10 या 10 की घातों से दशमलवों के विभाजन का नियम बताइए ।

12. निम्न संक्रियाएँ कीजिए । [याद कीजिए कि संक्रियाएँ किस क्रम में की जाती हैं ।]

$$(i) 24596 \div 1000$$

$$(ii) 0.024596 \times 1000$$

$$(iii) 2459.6 \div 100$$

$$(iv) 24596 \div 100$$

$$(v) 315[5.34 \div 2(376 - 108)]$$

$$(vi) 7[6.725 \div 2308 + 3.11(1.8 - 3.12)]$$

$$(vii) 0.01[(9.04 - 11.2) \div 0.54 + 2.53(173 - 6.6)]$$

$$(viii) 152 \div 0.08[81.83 - 6.5(52.3 - 28.2)]$$

$$(ix) 15.75[12.37 \div 8(-16.160 - 2.25) + 228]$$

$$(x) 38 - (16.5 - 0.08) - [155 - (24.82 - 18.7) + 24 \div 0.5]$$

12. यदि $23446 \div 19 = 1234$ हो, तो $23.446 \div 19$ का क्या मान होगा ?

14. निम्न संक्रियाएँ करने में लम्बी विभाजन (long division) विधि का प्रयोग कीजिए। अपना उत्तर 3 दशमलव स्थानों तक दीजिए।

$$(i) 293.7 \div 0.07$$

$$(ii) 75.25 \div 8$$

$$(iii) 335.456 \div 95.32$$

$$(iv) 5748.64 \div 0.976$$

15. सुन्दर के पास एक 10 रु० का नोट है। वह 2.90 रु० में एक सिनेमा का टिकट तथा 0.95 रु० में एक आइसक्रीम खरीदता है। उसके पास कितनी धन-राशि बच रह जाएगी ?

16. एक टॉफियों के डिब्बे का कुल भार 1 किलोग्राम है। टॉफियों का शुद्ध भार 895 ग्राम है। डिब्बे का भार कितना है ?

17. ममता 90 पैसे प्रति किलोग्राम की दर से 3.5 किलोग्राम आलू तथा 1.30 रु० प्रति किलोग्राम की दर से 1.5 किलोग्राम प्याज खरीदती है। वह कुल कितनी धन-राशि व्यय करती है ?

18. एक कार 3.75 घण्टों में 165 किलोमीटर चलती है। 1 घण्टे में वह कितने किलोमीटर चलती है ? (कल्पना कीजिए कि कार समान गति से चल रही है।)

19. विनय की वार्षिक आय 6963 60 रु० है। उसकी मासिक आय निर्धारित कीजिए।
20. महेन्द्र एक 140 वर्ग मीटर का प्लाट 10136 रु० में खरीदता है। प्रति वर्ग-मीटर दर ज्ञात कीजिए।
21. गेहूँ की 16 बोřियों का भार 16.80 बिबटल है। प्रत्येक बोरी का भार ज्ञात कीजिए। (कल्पना कीजिए कि प्रत्येक बोरी में गेहूँ का भार समान है।) पाँच बोřियों का भी भार ज्ञात कीजिए।
22. एक दौड़ने वाला पहले सेकेण्ड में 12 मीटर की दूरी तय करता है। फिर वह आने वाले प्रत्येक सेकेण्ड में अपने से पहले सेकेण्ड में तय की गई दूरी का $\frac{3}{4}$ भाग तय करता है। वह पहले 4 सेकेण्ड में कितना दौड़ लेता है? (अपना उत्तर दशमलव के 2 स्थानों तक दीजिए।)

परिमेय संख्याओं का दशमलव निरूपण

इस एकक में हम यह सीखेंगे कि किसी परिमेय संख्या को किस प्रकार एक सांत (terminating) अथवा असांत आवर्ती (non-terminating repeating) दशमलव के रूप में निरूपित किया जाता है। हम यह ज्ञात करने के नियम का अध्ययन करेंगे कि किसी दी हुई परिमेय संख्या का दशमलव निरूपण सांत होगा अथवा असांत आवर्ती। लम्बी विभाजन विधि के 'क्यों' अर्थात् उसके औचित्य को स्पष्ट किया गया है। अंत में, किसी परिमेय संख्या का दशमलव निरूपण प्राप्त करने के लिए संख्या रेखा का प्रयोग किया गया है।

5.1 अनात्मक परिमेय संख्याओं का दशमलव निरूपण

निश्चय ही आप जानते हैं कि किस प्रकार परिमेय संख्याओं जैसे कि $\frac{1}{4}$, $\frac{11}{8}$, $\frac{27}{10}$, $\frac{3286}{128}$ को दशमलवों के रूप में व्यक्त किया जाता है। इनमें से

के लिए आप अंश का हर से मस्तिष्क में ही विभाजन (mental division) लेते हैं। उदाहरणार्थ,

$$\frac{1}{4} = 0.25$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 8 \\ \hline 27 \\ 10 \end{array} = 1.375$$

अन्य संख्याओं के लिए आप लम्बी विभाजन (long division) विधि का प्रयोग कर सकते हैं। उदाहरणार्थ,

$$\frac{3286}{128} = \frac{1643}{64} = 25.671875$$

इन दशमलवों में से प्रत्येक अपनी तदनुरूपी परिमेय संख्या का दशमलव निरूपण है। साथ ही, इनके दशमलववाश का कहीं पर अंत (termination या end) भी होता है। अतः हम इन्हें सीत दशमलव (terminating decimal) कहते हैं।

	25.671875
64)	1643.000000
	128
	363
	320
	430
	384
	460
	448
	120
	64
	560
	512
	480
	448
	320
	320
	×

आइए अब परिमेय संख्या, उदाहरणार्थ, $\frac{1}{3}$ के दशमलव निरूपण पर विचार करें। हम देखते हैं कि यदि हम 1 को 3 से विभाजित करें तो हमें दशमलव बिंदु (decimal point) प्राप्त होता है तथा हमें लगातार भागफल में अंक 3 प्राप्त होता रहता है। इस प्रक्रिया का कभी अंत नहीं होता। हम इसे निम्न प्रकार लिखने हैं :

$$\frac{1}{3} = 0.33333...$$

$$\begin{array}{r} 0.33333... \\ 3 \overline{) 1.0} \\ \underline{9} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 1 \end{array}$$

तीन बिन्दियों (dots) का यह अर्थ है कि 3 लिखने की प्रक्रिया का कोई अंत नहीं है। अतः हम इस प्रकार के दशमलव को असांत (non-terminating) दशमलव कहते हैं। हम यह भी देखते हैं कि अंक 3 बार-बार आता है, अर्थात् अंक 3 की पुनरावृत्ति होती है। अतः हम ऐसे दशमलव को असांत आवर्ती (non-terminating repeating या non-terminating recurring) दशमलव कहते हैं। प्रायः हम पुनरावृत्ति वाले भाग के ऊपर एक रेखा लगा देते हैं और निम्न प्रकार लिखते हैं :

$$\frac{1}{3} = 0.33333... = 0.\overline{3}$$

आइए एक अन्य परिमेय संख्या, उदाहरणार्थ, $\frac{24}{7}$ के दशमलव निरूपण पर विचार करें। हम 24 को 7 से भाग देते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं :

$$\frac{24}{7} = 3.428571428571428571...$$

हम पुनः देखते हैं कि निरूपण एक असंत आवर्ती दशमलव है। इस स्थिति में हम देखते हैं कि छः अंकों 4, 2, 8, 5, 7 और 1 का समूह बार-बार आता है। अतः हम निम्न प्रकार लिखते हैं :

$$\frac{24}{7} = 3.428571$$

वास्तव में यह सिद्ध किया जा सकता है कि प्रत्येक घनात्मक परिमेय संख्या या तो एक सत दशमलव या एक असंत आवर्ती दशमलव के रूप में व्यक्त की जा सकती है। वस्तुतः यह परिणाम प्रत्येक परिमेय संख्या, चाहे वह घनात्मक हो अथवा ऋणात्मक, के लिए सत्य है। [इस परिणाम की उपपत्ति हमारी इस पुस्तक की सीमा के बाहर है। हम केवल इसको सत्य मान लेंगे।]

प्रवनावली 5.1

1. निम्न परिमेय संख्याओं के दशमलव निरूपण दीजिए। बताइए कि निरूपण एक सत दशमलव है या असंत आवर्ती दशमलव।

(i) $\frac{1}{5}$

(ii) $\frac{6}{25}$

(iii) $\frac{5}{6}$

(iv) $\frac{13}{20}$

(v) $\frac{411}{160}$

(vi) $\frac{1108}{32}$

(vii) $\frac{131}{25}$

(viii) $\frac{213}{20}$

(ix) $\frac{711}{11}$

(x) $\frac{525}{13}$

(xi) $\frac{5}{7}$

(xii) $\frac{7}{9}$

2. दिखाइए कि निम्न परिमेय संख्याओं के दशमलव निरूपण सार्व है :

$$(i) \frac{2}{5}$$

$$(ii) \frac{13}{4}$$

$$(iii) \frac{3}{8}$$

$$(iv) \frac{401}{25}$$

$$(v) \frac{129}{64}$$

3. दिखाइए कि निम्न परिमेय संख्याओं के दशमलव निरूपण असार्व हैं :

$$(i) \frac{14}{9}$$

$$(ii) \frac{7}{15}$$

$$(iii) \frac{11}{48}$$

$$(iv) \frac{1}{11}$$

$$(v) \frac{22}{7}$$

*5.2 लम्बी विभाजन विधि का 'क्यों'

कोई विभाजन करते समय क्या आपने जो आप कर रहे हैं उसके 'क्यों' के बारे में कभी विचार किया है ? उदाहरणार्थ, 1 को 4 से विभाजित करने में आप 1 के आगे शून्य और भागफल में दशमलव बिन्दु क्यों लगा देते हैं ? तब आप क्यों 10 को 4 से विभाजित करते हैं और 2 को भागफल में अगले अंक के रूप में तथा 2 शेषफल के रूप में लिखते हैं ? पुनः आप शेषफल '2' के आगे शून्य क्यों लगाते हैं और क्यों यही प्रक्रिया दोहराते रहते हैं ? आप जो कुछ करते हैं वह क्यों करते हैं ? आइए देखें कि हम इन 'क्यों' के उत्तर ज्ञात कर सकते हैं या नहीं ।

परिमेय संख्या $\frac{1}{4}$ को ज्ञात । हम इसे निम्न प्रकार लिखते हैं :

$$\frac{1}{4} = \frac{10}{4 \times 10} = \frac{1}{10} \quad (1)$$

अब हम 10 को 4 से विभाजित कर सकते हैं । हमने इसे $\frac{10}{4} \times \frac{1}{10}$ ही क्यों

लिखा और उदाहरणार्थ, $\frac{11}{4} = \frac{1}{11}$ या $\frac{15}{4} \times \frac{1}{15}$ क्यों नहीं लिखा ? यह इसलिए

कि हम अंकन की 10 आधार वाली पद्धति (base-10 system of numeration) में कार्य कर रहे हैं । इस प्रकार (1) को निम्न प्रकार लिख सकते हैं :

$$\frac{1}{4} = \left(2 + \frac{2}{4} \right) \times \frac{1}{10}$$

अर्थात्, $\frac{1}{4} = \frac{2}{10} + \frac{1}{20} \quad (2)$

अब हम लिखते हैं कि :

$$\frac{1}{20} = \frac{100}{20} \times \frac{1}{10^2} \quad (\text{क्यों ?})$$

4)	.25
	1.0
	8
	2
	20
	20
	×

अर्थात्, $\frac{1}{20} = 5 \times \frac{1}{10^2}$

अतः, (2) को इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2} \quad (3)$$

स्थानीय मान के सिद्धांत (place-value principle) का प्रयोग करते हुए हम (3) को निम्न प्रकार लिखते हैं :

$$\frac{1}{4} = .25$$

आइए कुछ और उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : 1 को 8 में विभाजित कीजिए और अपना उत्तर दशमलव के रूप में दीजिए।

हल : हम निम्न प्रकार लिखते हैं :

$$\frac{1}{8} = \frac{10}{8} - \frac{1}{10}$$

$$= \left(1 + \frac{2}{8} \right) - \frac{1}{10}$$

अर्थात्, $\frac{1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{40}$ (1)

अब, $\frac{1}{40} = \frac{100}{40} - \frac{1}{10^2}$

$$= \left(2 + \frac{20}{40} \right) - \frac{1}{10^2}$$

अर्थात्, $\frac{1}{40} = \frac{2}{10^2} + \frac{1}{200}$

अतः (1) को इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{1}{200}$$
 (2)

अब, $\frac{1}{200} = \frac{1000}{200} - \frac{1}{10^3}$

$$= 5 - \frac{1}{10^3}$$

अर्थात्, $\frac{1}{200} = \frac{5}{10^3}$

अतः (2) को इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{5}{10^3}$$
 (3)

$$\begin{array}{r} 8 \overline{) 125} \\ \underline{8} \\ 45 \\ \underline{40} \\ 50 \\ \underline{40} \\ 10 \\ \underline{10} \\ 0 \end{array}$$

स्थानीय मान के सिद्धान्त का प्रयोग कर हम (३) को निम्न प्रकार लिखते हैं :

$$\frac{1}{8} = 125$$

उदाहरण 2 : $\frac{577}{500}$ का दशमलव निरूपण ज्ञात कीजिए ।

हल : हम देखते हैं कि

$$\frac{577}{500} = 1 + \frac{77}{500} \quad (1)$$

$$\text{अब, } \frac{77}{500} = \frac{770}{5000} = \frac{1}{10}$$

$$= \left(1 + \frac{270}{500} \right) \cdot \frac{1}{10}$$

$$\text{अर्थात्, } \frac{77}{500} = \frac{1}{10} + \frac{27}{500} \quad (2)$$

$$\text{साथ ही, } \frac{27}{500} = \frac{2700}{5000} = \frac{1}{10^3}$$

$$= \left(5 + \frac{200}{500} \right) \cdot \frac{1}{10^3}$$

$$\text{अर्थात्, } \frac{27}{500} = \frac{5}{10^3} + \frac{2}{500} \quad (3)$$

$$\text{अब, } \frac{2}{500} = \frac{2000}{5000} = \frac{1}{10^4} = \frac{4}{10^5} \quad (4)$$

	1.154
500	577
	500
	77
	770
	500
	270
	2700
	2500
	200
	2000
	2000

(5) को (3) में प्रतिस्थापित करने पर

$$\frac{577}{5000} = \frac{5}{10} + \frac{7}{10^2} \quad (5)$$

(5) को (3) में प्रतिस्थापित करने पर

$$\frac{577}{5000} = \frac{1}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{7}{10^3} \quad (6)$$

(6) को (3) में प्रतिस्थापित करने पर

$$\frac{577}{5000} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{7}{10^3} \quad (7)$$

अब हमें 2 मान के मिश्रण का प्रयोग कर हम (7) को निम्न प्रकार लिखते हैं :

$$\frac{577}{5000} = 1.154$$

उपर्युक्त उदाहरणों में हम देखते हैं कि 'प्रक्रिया' कुछ (परिमित संख्या के) चरण (steps) के बाद समाप्त हो जाती है। हम कहते हैं कि इन संख्याओं के दशमलव निरूपण मान है।

आइए अब एक ऐसे उदाहरण पर विचार करें जहाँ प्रक्रिया समाप्त नहीं होती।

उदाहरण 3: $\frac{1}{14}$ का दशमलव निरूपण जान कीजिए।

हल : इस इस प्रकार लिखते हैं :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{14} = \frac{10}{14} \times \frac{1}{10} \\ & = \frac{100}{14} \times \frac{1}{10^2} \text{ (क्यों ?)} \\ & = \left(7 + \frac{2}{14} \right) \times \frac{1}{10^2} \end{aligned}$$

अर्थात्, $\frac{1}{14} = \frac{7}{10^2} + \frac{1}{700}$ (1)

अब, $\frac{1}{700} = \frac{1000}{700} \times \frac{1}{10^3}$

$$= \left(1 + \frac{3}{7} \right) \times \frac{1}{10^3}$$

अर्थात्, $\frac{1}{700} = \frac{1}{10^3} + \frac{3}{7000}$ (2)

अब, $\frac{3}{7000} = \frac{30000}{7000} \times \frac{1}{10^4}$

$$= \left(4 + \frac{2}{7} \right) \times \frac{1}{10^4}$$

अर्थात्, $\frac{3}{7000} = \frac{4}{10^4} + \frac{2}{70000}$ (3)

अब, $\frac{2}{70000} = \frac{200000}{70000} \times \frac{1}{10^5}$

$$= \left(2 + \frac{6}{7} \right) \times \frac{1}{10^5}$$

अर्थात्, $\frac{2}{70000} = \frac{2}{10^5} + \frac{6}{700000}$ (4)

07142857..
14)1.00
98
2
20
14
6
60
56
4
40
28
12
120
112
8
80
70
10
100
98
2

(अंक दोहराने
प्रारंभ हो
जाएँगे।)

$$\text{अब, } \frac{6}{7000000} = \frac{6000000}{7000000} \cdot \frac{1}{10^6}$$

$$= \left(8 + \frac{4}{7} \right) \cdot \frac{1}{10^6}$$

$$\text{अर्थात्, } \frac{6}{7000000} = \frac{8}{10^6} + \frac{4}{70000000} \quad (5)$$

$$\text{अब, } \frac{4}{70000000} = \frac{40000000}{70000000} \cdot \frac{1}{10^7}$$

$$= \left(5 + \frac{5}{7} \right) \cdot \frac{1}{10^7}$$

$$\text{अर्थात्, } \frac{4}{70000000} = \frac{5}{10^7} + \frac{5}{700000000} \quad (6)$$

$$\text{अब, } \frac{5}{700000000} = \frac{500000000}{700000000} \cdot \frac{1}{10^8}$$

$$= \left(7 + \frac{1}{7} \right) \cdot \frac{1}{10^8}$$

$$\text{अर्थात्, } \frac{5}{700000000} = \frac{7}{10^8} + \frac{1}{7000000000} \quad (7)$$

इत्यादि ।

क्रमशः (7) को (6) में, (6) को (5) में, (5) को (4) में, (4) को (3) में, (3) को (2) में और (2) को (1) में प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\frac{1}{14} = \frac{7}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{4}{10^4} + \frac{2}{10^5} + \frac{8}{10^6} + \frac{5}{10^7} + \frac{7}{10^8} + \dots \quad (8)$$

स्थानीय मान के सिद्धांत का प्रयोग कर हम (8) को निम्न प्रकार लिखते हैं :

$$\frac{1}{14} = 0.07142857 \dots$$

यदि हम मानें कि प्रक्रिया समाप्त नहीं होती। वस्तुतः अक दोहगने प्रारम्भ हो जाते हैं। हम कहते हैं कि हम सरा का दशमलव निरूपण असान आबती ।

क्या हम आप हम 'प्रक्रिया' की नम्बो विभाजन विधि के चरणों में सम्मिलित कर सकते हैं? यदि हाँ तो निम्न प्रश्नावली हल करने का प्रयत्न कीजिए।

प्रश्नावली 5.2

- 1 निम्न में से प्रत्येक का दशमलव निरूपण ज्ञान कीजिए। अनुच्छेद 5.2 की विधि का प्रयोग कीजिए। (नम्बो विभाजन विधि का प्रयोग नहीं कीजिए।)

$$(i) \frac{13}{20}$$

$$(ii) \frac{9}{8}$$

$$(iii) \frac{3}{32}$$

- 2 निम्न में से प्रत्येक का दशमलव के 4 स्थानों तक दशमलव निरूपण ज्ञान कीजिए। अनुच्छेद 5.2 की विधि का प्रयोग कीजिए। (नम्बो विभाजन विधि का प्रयोग नहीं कीजिए।)

$$(i) \frac{11}{524}$$

$$(ii) \frac{679}{1375}$$

$$(iii) \frac{294}{90}$$

5.3 मान प्रथम असान आबती दशमलव

क्या हम किसी परिमेय संख्या को केवल देख कर ही बता सकते हैं कि उसका दशमलव निरूपण सान होगा या असान आबती? हम यह मान लेते हैं कि यह परिमेय संख्या निम्नतम पदों में है। आइए देखें कि हम कौन से

उदाहरणों का अध्ययन कर चुके हैं। हम देखते हैं कि निम्न परिमेय संख्याओं के निरूपण मान दशमलव हैं :

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 11 & 27 & 1643 & 577 \\ 4 & 8 & 10 & 64 & 500 \end{array}$$

आइए इनमें से प्रत्येक के हर के अभाज्य गुणनखंड (prime factorization) करें। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\begin{array}{cccccc} 4 & = & 2 & \cdot & 2 \\ 8 & = & 2 & \cdot & 2 & \cdot & 2 \\ 10 & = & 2 & \cdot & 5 \\ 64 & = & 2 & \cdot & 2 & \cdot & 2 & \cdot & 2 & \cdot & 2 & \cdot & 2 \\ 500 & = & 2 & \cdot & 2 & \cdot & 5 & \cdot & 5 & \cdot & 5 \end{array}$$

हम देखते हैं कि इनमें हरों के अभाज्य गुणनखंड केवल 2 और 5 हैं। वास्तव में यह सिद्ध* किया जा सकता है कि यदि किसी परिमेय संख्या, जो कि निम्नतम पदों में हर के 2 और 5 के अतिरिक्त कोई अन्य अभाज्य गुणनखंड न हो तो उस परिमेय संख्या का दशमलव निरूपण सांत होता है। यदि हर के 2 और 5 के अतिरिक्त कोई अन्य गुणनखंड हो तो उस परिमेय संख्या का दशमलव निरूपण असांत आवर्ती होता है।

आइए पुनः हम अपने उदाहरणों पर वापिस आ जाएँ। आपको याद होगा कि परिमेय संख्याओं $\frac{1}{3}$, $\frac{24}{7}$ और $\frac{1}{14}$ (जिनके हरों के 2 और 5 के अतिरिक्त भी अभाज्य गुणनखंड हैं) के दशमलव निरूपण वास्तव में असांत आवर्ती हैं।

* इस परिणाम की उपपत्ति इस पुस्तक की सीमा के बाहर है।

आइए कुछ और उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : निर्धारित कीजिए कि निम्न में से किस-किस के दशमलव निरूपण सांत हैं और किस-किस के असांत आवर्ती :

$$(i) \frac{33}{24}$$

$$(ii) \frac{253}{1280}$$

$$(iii) \frac{486}{3360}$$

हल : (i) हम देखते हैं कि $\frac{33}{24}$ निम्नतम पदों में नहीं है। हम अंश और हर में

से 3 को काट देते हैं और तब हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\frac{33}{24} = \frac{11}{8}$$

$$\text{अब, } 8 = 2 \times 2 \times 2$$

हर के अभाज्य गुणनखंड केवल 2 हैं।

इस प्रकार, $\frac{33}{24}$ का दशमलव निरूपण सांत होगा।

$$(ii) \frac{253}{1280} \text{ निम्नतम पदों में है।}$$

$$\text{अब, } 1280 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$$

हर के अभाज्य गुणनखंड केवल 2 और 5 हैं।

इस प्रकार, $\frac{253}{1280}$ का दशमलव निरूपण सांत होगा।

$$(iii) \frac{486}{3360} = \frac{2 \times 3 \times 81}{2 \times 3 \times 560} = \frac{81}{560}$$

$$\text{अब, } 560 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7$$

चूंकि हर का 2 और 5 के अतिरिक्त एक अन्य अभाज्य गुणनखंड (अर्थात् 7) है,

अतः $\frac{486}{3360}$ का दशमलव निरूपण असांत आवर्ती होगा।

5.4 ऋणात्मक परिमेय संख्याओं के दशमलव निरूपण

यदि $\frac{p}{q}$ एक ऋणात्मक परिमेय संख्या हो तो स्पष्ट है कि $-\frac{p}{q}$ एक धनात्मक परिमेय संख्या होगी। हम पहले से ही जानते हैं कि एक धनात्मक परिमेय संख्या का दशमलव निरूपण किस प्रकार ज्ञात किया जाता है। इस निरूपण के आगे ऋण चिन्ह (minus sign) लगाने पर जो हमें प्राप्त होता है उसे ही हुई ऋणात्मक परिमेय संख्या का दशमलव निरूपण कहा जाता है।

आइए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : $-\frac{27}{20}$ का दशमलव निरूपण ज्ञात कीजिए।

हल : $\frac{27}{20}$ का ऋणात्मक $\frac{27}{20}$ है।

$$\text{अब, } \frac{27}{20} = 1.35$$

$$\text{इस प्रकार, } -\frac{27}{20} = -1.35$$

उदाहरण 2 : $-\frac{1473}{250}$ का दशमलव निरूपण ज्ञात कीजिए।

हल : $-\frac{1473}{250}$ का ऋणात्मक $\frac{1473}{250}$ है।

$$\text{अब, } \frac{1473}{250} = 5.892$$

$$\text{इस प्रकार, } -\frac{1473}{250} = -5.892$$

उदाहरण 3 : $\frac{52}{15}$ का दशमलव निरूपण ज्ञात कीजिए।

हल : $\frac{52}{15}$ का ऋणात्मक $\frac{52}{15}$ है।

अब, $\frac{52}{15} = 3.46$

इस प्रकार, $-\frac{52}{15} = -3.46$

प्रश्नावली 5.3

1. बिना भाग दिए निर्धारित कीजिए कि निम्न में से किस-किस के दशमलव निरूपण सत हैं और किस-किस के असत आवर्ती :

(i) $\frac{92}{625}$

(ii) $-\frac{39}{160}$

(iii) $\frac{63}{140}$

(iv) $\frac{837}{325}$

(v) $-\frac{19}{22}$

(vi) $-\frac{527}{300}$

(vii) $\frac{21}{49}$

2. निम्न में से प्रत्येक का दशमलव निरूपण ज्ञात कीजिए :

(i) $-\frac{39}{160}$

(ii) $-\frac{391}{128}$

(iii) $-\frac{527}{300}$

(iv) $-\frac{19}{22}$

5.5 मर्याद रेखा की सहायता से दशमलव निरूपण

जब पढ़ने से ही जानते हैं कि एक परिमेय संख्या को मर्याद रेखा पर किस प्रकार निरूपित किया जाता है। अब हम सीखेंगे कि मर्याद रेखा का प्रयोग उसके द्वारा दशमलव निरूपण किस प्रकार प्राप्त किया जाता है। आइए, उदाहरणार्थ, मर्याद $\frac{1}{4}$ पर विचार करें। मर्याद $\frac{1}{4}$ को निरूपित करने वाला बिंदु P प्राप्त



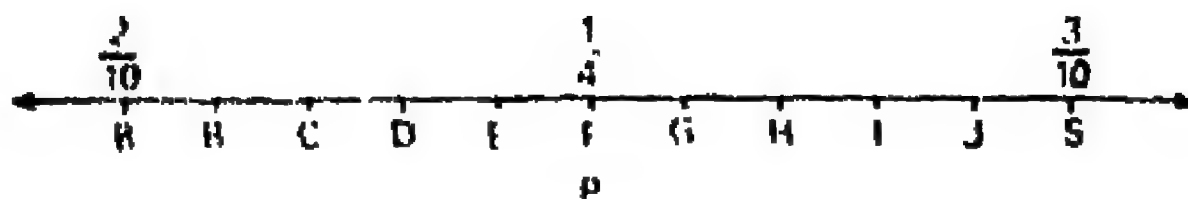
आकृति 5.1

करने के लिए हम 0 से 1 तक की दूरी (अंतराल) (0,1) को 4 समान रेखाखंडों में विभाजित करने हैं। [4 समान रेखाखंडों में विभाजन और मर्यादों $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ को आकृति 5.1 में नहीं दिखाया गया है।] अब हम 0 से 1 तक की दूरी (अंतराल) (0,1) को 10 समान रेखाखंडों में भी विभाजित करने है जिसमें हमें $\frac{1}{10}$ निरूपित करने वाला बिंदु Q , $\frac{2}{10}$ निरूपित करने वाला बिंदु R तथा $\frac{3}{10}$ निरूपित करने वाला बिंदु S प्राप्त होता है। (देखिए आकृति 5.1)

हम देखते हैं कि $P \left(\frac{1}{4} \right)$, बिंदुओं $R \left(\frac{2}{10} \right)$ और $S \left(\frac{3}{10} \right)$ के बीच

स्थित है। हमारे शब्दों में,

$$\frac{2}{10} < \frac{1}{4} < \frac{3}{10}$$



आकृति 5.2

तदुपरान्त हम $\frac{2}{10}$ से $\frac{3}{10}$ तक की दूरी (अंतराल) RS लेते हैं और उसे पुनः 10 समान रेखाखंडों में विभाजित करते हैं जिससे हमें बिन्दु B, C, D, E, F, G, H, I और J प्राप्त होते हैं जैसाकि आकृति 5.2 में दिखाया गया है। [आकृति 5.1 के RS को 8 गुना बढ़ाकर आकृति 5.2 में दिखाया गया है।] अब B कोन सी परिमेय संख्या निरूपित करता है? चूंकि $\frac{1}{10}$ मापक की दूरी को 10 समान रेखाखंडों में उपविभाजित (subdivide) किया गया है, अतः स्पष्ट है कि $B, \frac{2}{10} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$ अर्थात् $\frac{2}{10} + \frac{1}{100}$ निरूपित करता है।

इसी प्रकार $C, \frac{2}{10} + \frac{2}{100}$ निरूपित करता है; $D, \frac{2}{10} + \frac{3}{100}$ निरूपित करता है; इत्यादि।

हम देखते हैं कि बिन्दु F, P के सपाती है। बिन्दु F कोन-सी परिमेय संख्या निरूपित करता है? $F, \frac{2}{10} + \frac{5}{100}$ निरूपित करता है। अतः हमें निम्न प्राप्त होता है।

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{10} + \frac{5}{100}$$

स्थानीय मान के सिद्धांत का प्रयोग करने पर हमें $\frac{1}{4}$ का दशमलव निरूपण 0.25 प्राप्त हो जाता है।

दशमलव निरूपण ज्ञात करने की उपर्युक्त विधि कुछ अधिक जटिल है। साथ ही, यदि इसकी तुलना विभाजन की विधि से की जाए, तो यह अव्यावहारिक लगती है। इसलिए हम इस पुस्तक में इस विधि का आगे प्रयोग नहीं करेंगे।

पाठक यदि चाहें तो कुछ परिमेय संख्याओं, उदाहरणार्थ, $\frac{1}{5}$, $\frac{6}{25}$, $\frac{3}{20}$ का इस विधि से दशमलव निरूपण ज्ञात कर सकते हैं।

मुख्य संकल्पनाएँ

सात दशमलव

सम्बन्धी विभाजन विधि

असात भावर्ती दशमलव

परिमेय संख्याओं का दशमलव निरूपण

एक VI

परिमय गुणांकों के बीजीय व्यंजक

इस एकक में हम परिमय गुणांकों के बीजीय व्यंजकों (algebraic expressions with rational coefficients) के बारे में अध्ययन करेंगे। विशेष रूप से हम यह सीखेंगे कि एक अर बहुपदों को किस प्रकार जोड़ा और घटाया जाता है। किसी प्रथम घात के बहुपद का शून्य हल करने की विधि का भी उल्लेख किया गया है।

6.1 पुनरावलोकन

आप पिछली कक्षाओं में पढ़े हुए एकक 'गुणांकीय गुणांकों के बीजीय व्यंजक' का पुनरावलोकन कीजिए। विशेष रूप से आपको निम्न संकल्पनाओं का पुनरावलोकन करना चाहिए :

बीजीय व्यंजक — एकपदी और द्विपद।

बीजीय व्यंजक के पद—पद के गुणनखंड : अक्षर गुणनखंड, संख्यात्मक गुणनखंड। पद का गुणांक। समान पद।

बीजीय व्यंजकों का योग और व्यवकलन।

समूहन संकेतों के प्रयोग—छोटा कोष्ठक, बड़ा कोष्ठक और संभल कोष्ठक।

बीजीय व्यंजकों का गुणन।

किसी व्यंजक का मान—प्रतिस्थापन।

6.2 परिमेय गुणांकों के बीजीय व्यंजक

अब हम परिमेय गुणांको के बीजीय व्यंजकों के बारे में अध्ययन करने हैं। आपको याद होगा कि बीजीय व्यंजक एक संख्या अथवा मूलभूत संक्रिया(ओं) के उपयोग से बना संख्याओं (अक्षर संख्याएँ भी सम्मिलित हैं) का एक संयोग होता है।

$$\frac{4}{7}x + \frac{3}{16}x^2 + \frac{2}{3} + 8x - \frac{3}{17}xy, 23x^4, \frac{27}{4} + \frac{5}{11}z, \frac{3}{2}xyz,$$

$$\frac{x+1}{2x-3}, \frac{\frac{3}{5}x^2 + xy + 4}{x^2 + y}, \text{ इत्यादि परिमेय गुणांको के बीजीय व्यंजकों के}$$

$$\text{कुछ उदाहरण हैं। इनमें से } \frac{4}{7}x + \frac{3}{16}x^2, \frac{5}{11}z, 23x^4 \text{ और } \frac{x+1}{2x-3}$$

उन व्यंजकों के उदाहरण हैं जिनमें केवल एक ही अक्षर संख्या (literal number) संभव है। हम कहते हैं कि ये एक चर के बीजीय व्यंजक (algebraic expressions in one variable) हैं।

$$\frac{2}{3} + 8x - \frac{3}{17}xy \text{ और } \frac{\frac{3}{5}x^2 + xy + 4}{x^2 + y}$$

दो चरों के बीजीय व्यंजकों के उदाहरण हैं। अब से, $-\frac{3}{2}xyz$ तीन चरों के बीजीय व्यंजक का एक उदाहरण है।

$a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots$ के रूप का बीजीय व्यंजक एक चर x में बहुपद (polynomial in one variable, x) कहलाता है। हम $a, b, c, d,$ इत्यादि को परिमेय संख्याएँ इस प्रकार लेंगे कि इसमें से कम से कम एक अवश्य ही शून्येतर हो। तीन बिंदियाँ यह दर्शाती हैं कि बहुपद में x की उच्चतर घातों

* जब सभी गुणांक $a, b, c, d,$ इत्यादि शून्य हों तो बहुपद शून्य बहुपद (zero polynomial) कहलाता है।

(higher powers) के और अधिक (परिमित सख्या के) पद भी हैं। इस प्रकार, $\frac{4}{7}x + \frac{3}{16}x^2$ और $23x^4$, x में बहुपद हैं तथा $\frac{5}{11}z$, z में एक बहुपद है।

हम देखते हैं कि $\frac{x+1}{2x-3}$, x में एक बीजीय व्यंजक है परन्तु x में एक बहुपद नहीं है।

बहुपदों के कुछ अन्य उदाहरण निम्न हैं :

$$2x - \frac{3}{4}x^2, \frac{1}{4} - 3x + \frac{5}{7}x^4, x^{10}, 2 + \frac{2}{7}y - 18y^4, z - 19z^5, \frac{4}{3}, 12x + 2x^2, \text{ इत्यादि।}$$

हम एकक में हम एक चर में बहुपद अर्थात् एक चर बहुपदों का अध्ययन करेंगे।

6.3 बहुपद की घात

अब हम बहुपद की घात (degree of a polynomial) की संकल्पना का अध्ययन करेंगे। पहले हम एकपदी (monomial) की घात के बारे में अध्ययन करेंगे। निम्न एकपदियों पर विचार कीजिए :

$$2x, -\frac{3}{2}x^2, \frac{7}{4}x^3$$

हम देखते हैं कि एकपदी $2x$ में चर का घातांक (exponent of the variable) 1 है, एकपदी $-\frac{3}{2}x^2$ में चर का घातांक 2 है। एकपदी $\frac{7}{4}x^3$ में चर का घातांक क्या है?

हम कहते हैं कि x में एकपदी की घात, एकपदी में x का घातांक होता है। उग प्रकार, $2x$ की घात 1 है, $\frac{3}{2}x$ की घात 2 है तथा $\frac{7}{4}x^3$ की घात 3 है। $\frac{13}{4}x^5$ की घात क्या है? x^6 की घात क्या है?

एकपदी, उदाहरणार्थ, 1 की घात के बारे में आप क्या सोचते हैं? हम $x^0 = 1$ लिखते हैं। अतः हम कहते हैं कि, x में 1 की घात 0 है। इसी प्रकार एक एकपदी अंगे कि $\frac{27}{4}$ को $\frac{27}{4}x^0$ लिखा जा सकता है। इसकी घात भी शून्य ही है।

आइए अब एक द्विपद (binomial), उदाहरणार्थ, $2x + \frac{3}{4}x^2$ पर विचार करें। इसके दो पद, अर्थात्, $2x$ और $\frac{3}{4}x^2$ है। प्रत्येक पद एक एकपदी है और हम जानते हैं कि इसकी घात किस प्रकार जान की जाती है। $2x$ की घात 1 है तथा $\frac{3}{4}x^2$ की घात 2 है। दोनों घातों में बड़ी घात 2 है।

हम कहते हैं कि उपर्युक्त द्विपद की घात 2 है। $-\frac{11}{2}x + 18x^4$ की घात क्या है? दोनों घातों में बड़ी घात 4 है। अतः द्विपद $-\frac{11}{2}x + 18x^4$ की घात 4 है।

क्या अब आप बता सकते हैं कि त्रिपद (trinomial) की घात किस प्रकार जान की जाती है? उदाहरणार्थ, $4 - \frac{x^3}{3} + 7x^4$ पर विचार कीजिए। तीनों पदों की घाते क्रमशः 0, 2 और 4 है। इन तीनों घातों में 4 सबसे बड़ी घात है। हम कहते हैं कि त्रिपद $4 - \frac{x^3}{3} + 7x^4$ की घात 4 है।

इस प्रकार, किसी बहुपद की घात उसके विभिन्न पदों की घातों में सबसे बड़ी घात होती है। उदाहरणार्थ, बहुपद $2x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^5 + 7x^3$ पर विचार कीजिए। इसमें 4 पद हैं। इन 4 पदों की घाते क्रमशः 1, 2, 5 और 3 हैं। इन चारों घातों में सबसे बड़ी घात 5 है। अतः बहुपद $2x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^5 + 7x^3$ की घात 5 है। हम नीचे बहुपदों और उनकी घातों के कुछ और उदाहरण दे रहे हैं :

बहुपद	घात
7	0
16	
$x^2 + \frac{x^3}{4} - 7$	3
$0.2y^5 - y$	5
$2y - \frac{3}{2}y^4$	4
$1 - 3x + x^3 - \frac{x^4}{7}$	3
$2.7x^4$	3
$7x + 3.2$	1
$-18 + y^4 - \frac{2}{9}y^2$	4
$7x^5 - \frac{2}{3}x^4 + 16x^2 - x^3 + 5$	8
$\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{3} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6}$	6

प्रश्नावली 6.1

1 निम्न में से कौन-कौन से बीजीय अक्षर हैं ?

$$(i) \quad 3 - 2x$$

$$(ii) \quad 1 + \frac{3}{4}x^2 - 7$$

$$(iii) \quad \frac{x^2+1}{2y^2+9.5}$$

$$(iv) \quad 1 - \frac{3}{x}$$

$$(v) \quad \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x + 2x^2 - 7x^3 + 8x^4 - 5x^5 + 20x^6$$

$$(vi) \quad 28z$$

2 निम्न एकपदियों में से प्रत्येक की घात लिखिए :

$$(i) \quad 10x$$

$$(ii) \quad \frac{7}{8}x^3$$

$$(iii) \quad 100x^{10}$$

$$(iv) \quad \frac{18}{5}x^7$$

$$(v) \quad -\frac{1}{3}$$

$$(vi) \quad 2.3z^5$$

*(vii) x^n , जहाँ n एक पूर्ण संख्या है।

3 निम्न एकपदियों को उनकी घातों के आरोही क्रम में लिखिए :

$$12, 5x^{10}, -3x^7, \frac{2}{9}x^{11}, \frac{1}{3}x^2, 37x^{15}$$

4 निम्न एकपदियों को उनकी घातों के अवरोही क्रम में लिखिए :

$$7x^6, -8y^5, \frac{6}{11}x^9, 2.3y^4, -43, 16y^{16}$$

5. निम्न में से प्रत्येक बहुपद की घात ज्ञात कीजिए। प्रत्येक बहुपद को पुनः इस प्रकार लिखिए कि उसके पद अपनी घातों के आरोही क्रम में आएँ।

$$(i) \quad 5 + \frac{3}{8}y^3 - 7y$$

$$(ii) \quad 8 + 9x^3 - \frac{5}{4}x^2$$

$$(iii) \quad \frac{3}{2}x^4 - 7x + \frac{2}{3}x^3$$

$$(iv) \quad 5x + \frac{4}{5}x^4 - 4$$

$$(v) \quad 3.2x - 205 + 12x^7 - 8x^3$$

$$(vi) \quad 50 - 16x^3 + \frac{5}{3}x^6 - 5x^{10} + \frac{3}{2}x^8 - \frac{7}{8}x^2$$

6. एक घर के बीजीय व्यंजकों के ऐसे दो उदाहरण दीजिए जो बहुपद नहीं हैं।
7. x में 3 घात का एक बहुपद लिखिए। एक 4 घात का बहुपद तथा एक 0 घात का बहुपद भी लिखिए।
- *8. निम्न में से प्रत्येक बहुपद की घात लिखिए। a, b, c, d , इत्यादि परिमेय संख्याएँ हैं।

$$(i) \quad a, (a \neq 0)$$

$$(ii) \quad a + bx, (b \neq 0)$$

$$(iii) \quad a + bx + cx^2, (c \neq 0)$$

$$(iv) \quad a + bx + cx^2 + dx^3, (d \neq 0)$$

$$(v) \quad a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4, (e \neq 0)$$

6.4 बहुपदों का योग और व्यवकलन

हम पहले से ही जानते हैं कि पूर्णांकीय गुणांकों के बीजीय व्यंजकों* को किस प्रकार जोड़ा (या घटाया) जाता है। हम केवल समान पद (like terms) लेते हैं और उन्हें जोड़ (या घटा) देते हैं। अतः परिमेय गुणांकों से कोई कठिनाई उत्पन्न नहीं होनी चाहिए। हम पुनः समान पद लेंगे और उन्हें जोड़ (या घटा) लेंगे। हम नीचे कुछ उदाहरण दे रहे हैं :

उदाहरण 1 : $2x^5 + 3x + \frac{2}{3}$ और $-3x^5 + \frac{2}{5}x - 3$ को जोड़िए।

हल : हम समान पद लेते हैं और उन्हें जोड़ते हैं। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\begin{aligned} & 2x^5 + 3x + \frac{2}{3} + \left(-3x^5 + \frac{2}{5}x - 3 \right) \\ &= \left[2x^5 + (-3)x^5 \right] + \left[3x + \frac{2}{5}x \right] + \left[\frac{2}{3} + (-3) \right] \\ &= \left[2 + (-3) \right] x^5 + \left[3 + \frac{2}{5} \right] x + \left[\frac{2}{3} + (-3) \right] \\ &= -x^5 + \frac{17}{5}x - \frac{7}{3} \end{aligned}$$

विकल्पतः हम बहुपदों को इस प्रकार लिखते हैं कि उनके समान पद एक ही स्तम्भ में रहें और फिर उन्हें जोड़ते हैं। निस्संदेह बहुपद में, यदि

* हमने पिछली कक्षाओं में जो बीजीय व्यंजक पढ़े थे वे, वस्तुतः, बहुपद थे।

आवश्यक, तो नी. पदों का क्रम बढ़ना जा सकता है।

हम निम्न प्राप्त होता है :

$$\begin{aligned} 2x^4 + 3x^3 + \frac{2}{3} \\ 3x^3 + \frac{2}{5}x^2 - 3 \\ \dots x^2 + \frac{17}{5}x - \frac{7}{3} \end{aligned}$$

निम्नदेह, यह (स्तम्भानुसार) योग अधिक सुविधाजनक रहता है।

उदाहरण 2 : $2x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 1$ में से $3x^3 + x^2 - x$ को घटाइए।

हल : हम समान पद लाते हैं और घटाते हैं। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\begin{aligned} 2x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 1 - (3x^3 + x^2 - x) \\ = [2x^4 - 3x^3] + [-\frac{1}{2}x^2 - x^2] - 1 - (-x) \\ = x^4 - \frac{3}{2}x^3 - 1 + x \end{aligned}$$

विकल्पतः हम बहुपदों को इस प्रकार लिखते हैं कि उनके समान पद एक स्तम्भ में हों और फिर घटाते हैं। पुनः यदि आवश्यक हो तो, बहुपद में पदों का क्रम बढ़ना जा सकता है। हमें निम्न प्राप्त होता है

$$\begin{array}{r} 2x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 1 \\ + 3x^3 + \quad x^2 \quad - x \\ \hline x^4 - \frac{3}{2}x^3 - 1 + x \end{array}$$

निम्नदेह, यह (स्तम्भानुसार) व्यवकलन अधिक सुविधाजनक रहता है।

उदाहरण 3 : $\frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{4}x^3 + 3, \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}x^2 + x^3 - 7$ और

$-3x^3 + 8 + \frac{1}{2}x^3 - 5x^2$ के योग में से $x^3 - x^2 + x^3 - x + 1$ को घटाए।

हल : हम स्तम्भानुसार विधि को प्राथमिकता देंगे। हम बहुपदों को इस प्रकार लिखेंगे कि समान पद एक ही स्तम्भ में रहें। आपको याद होगा कि किसी बहुपद को घटाने के लिए हम उसके प्रत्येक पद का चिन्ह बदलते हैं और उसे जोड़ देते हैं। इस प्रकार हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\begin{array}{r} \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{4}x^3 + 3 \\ - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^3 - 7 + x \\ - 5x^2 + \frac{1}{2}x^3 + 8 - 3x^3 \\ + x^2 - x^3 + 1 + x^3 - x \\ \hline - 5x^2 + x^3 + 3 - 3x^3 + x \end{array}$$

उदाहरण 4 : समान पदों को एकत्रित कीजिए और जोड़िए :

$$\begin{aligned} & \left(15x^3 - \frac{12}{5}x^2 + \frac{5}{2}\right) + \left(\frac{25}{2}x^4 - 15x^3 + \frac{16}{5}x^2 - \frac{2}{5}\right) \\ & + \left(\frac{3}{16}x - 5x^3\right) - \left(\frac{11}{16}x - x^3 + \frac{16}{5}x^2 - \frac{21}{5}\right) \end{aligned}$$

हल : समान पद एकत्रित करने पर,

$$\begin{aligned} & \left[15x^3 - 15x^3 - 5x^3 - (-x^3)\right] - \frac{12}{5}x^2 + \left[\frac{5}{2} - \frac{2}{5} - \left(-\frac{21}{5}\right)\right] \\ & + \frac{25}{2}x^4 + \left[\frac{16}{5}x^2 - \frac{16}{5}x^2\right] + \left[\frac{3}{16}x - \frac{11}{16}x\right] \end{aligned}$$

अब हम उन पदों को काटते हुए, जिनका योग (स्पष्टतया) शून्य है, समान पदों को जोड़ते हैं। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$-4x^3 - \frac{12}{5}x^2 + \frac{63}{10} + \frac{25}{2}x^4 - \frac{1}{2}x$$

उदाहरण 5 : $0.4x^5 - 18x^7 + 32$ और $7.2x - 5.2x^4 - 1$ के योग में से $8.6x^7 + 2.8x^4 - 5.8x$ और $2.4x^7 - 3x^4 + 3$ का योग घटाइए।

हल : हम पहले $8.6x^7 + 2.8x^4 - 5.8x$ और $2.4x^7 - 3x^4 + 3$ का योग ज्ञात करते हैं। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\begin{aligned} & [8.6x^7 + 2.8x^4 - 5.8x] + [2.4x^7 - 3x^4 + 3] \\ & = 11x^7 - 0.2x^4 - 5.8x + 3 \end{aligned} \quad (1)$$

अब हम $0.4x^5 - 18x^7 + 32$ और $7.2x - 5.2x^4 - 1$ का योग ज्ञात करते हैं। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\begin{aligned} & [0.4x^5 - 18x^7 + 32] + [7.2x - 5.2x^4 - 1] \\ & = 0.4x^5 - 18x^7 + 31 + 7.2x - 5.2x^4 \end{aligned} \quad (2)$$

अंत में, हम (2) में से (1) को घटाते हैं। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\begin{aligned} & [0.4x^5 - 18x^7 + 31 + 7.2x - 5.2x^4] - [11x^7 - 0.2x^4 - 5.8x + 3] \\ & = 0.4x^5 - 18x^7 - 11x^7 + 31 - 3 + 7.2x + 5.8x - 5.2x^4 + 0.2x^4 \\ & = 0.4x^5 - 29x^7 + 28 + 13x - 5x^4 \end{aligned}$$

विकल्प. हम स्तम्भानुसार योग और व्यवकलन कर सकते हैं। चूंकि हमें अंतिम दो बहुपदों के योग को घटाना है, अतः स्पष्ट है कि इन दोनों बहुपदों में से प्रत्येक के प्रत्येक पद का बिम्ब बदला जाना चाहिए और फिर बहुपदों को जोड़ देना

चाहिए। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\begin{array}{r}
 0.4x^5 - 18x^7 + 32 \\
 + 8.6x^7 - 1 + 7.2x - 5.2x^4 \\
 + 2.4x^7 + 3 - 3x^4 \\
 \hline
 0.4x^5 - 29x^7 + 28 + 13x - 5x^4
 \end{array}$$

प्रश्नावली 6.2

1. निम्न में से प्रत्येक में योग ज्ञात कीजिए :

(i) $3x^3, x$

(ii) $5x^3, -3x^3, 2x^3, -\frac{5}{3}x^3, 7$

(iii) $\frac{13}{4}x^3 - \frac{2}{3}x + 5, -\frac{17}{4}x^3 - 9 + \frac{1}{3}x$

(iv) $1.2x^3 + 2.3x^3 + 2 - 3x, 2.1x^3 - 1.6x^3 + 3.4x - 9$

(v) $2 + 5x^4 - \frac{5}{4}x^3, 3x^4 - \frac{11}{4}x^3 - 12x$

(vi) $\frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{8}x + 9, \frac{1}{3}x^3 + 6 + \frac{7}{8}x + 2x^3$

(vii) $x^3 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{4}{5}x^2 + \frac{7}{8}x$

(viii) $6x^3 - \frac{3}{2}x + 7, \frac{1}{5}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{12}x - \frac{5}{24}$

2 घटाइए :

$$(i) -2x^4 + \frac{1}{3}x^2 - 12 \text{ में से } 6x^4 - \frac{5}{3}x^2 + 4$$

$$(ii) -10 + 3x + 5x^2 - \frac{7}{9}x^3 \text{ में से } \frac{5}{4}x^4 + \frac{2}{9}x^3 - x$$

$$(iii) -\frac{1}{13}x^2 + \frac{8}{13}x^4 + 20 \text{ में से } \frac{12}{13}x^2 - \frac{5}{13}x^3 - 15$$

$$(iv) 2.5x^2 + 1.5x^3 + 8 - 12x \text{ में से } 2.5x^3 - 7 - 3.5x^2$$

$$(v) 31x^2 + 8x - \frac{3}{5} \text{ में से } 19x^2 + \frac{12}{5}x + 1$$

3 जोड़िए :

$$(i) 0.3x^2 - \frac{5}{4}x^4 + 8 + 6x, 1.3x^2 - \frac{9}{4}x^4 + 3$$

$$\text{और } 4x^2 - \frac{15}{4}x^4 - x + 2$$

$$(ii) 5x^3 - \frac{3}{5}x^2 - \frac{1}{4}x + 2, \frac{2}{5}x^2 + x - \frac{3}{8} + \frac{5}{2}x^5, -\frac{7}{4}x$$

$$\text{और } -\frac{1}{2}x^5 + \frac{11}{8}$$

$$(iii) \frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{3}x - 3x^3 + 2, 3x^4 - \frac{14}{3}x, 5 - x^2, x^2$$

$$\text{और } \frac{5}{2}x^4 + \frac{22}{3}x + \frac{13}{2}x^1$$

$$(iv) x^5 + x^2 + \frac{1}{2}x^3, x + 1, \frac{2}{3}x^4 + \frac{5}{6} \text{ और}$$

$$\frac{1}{3}x^4 - x^2$$

$$(v) 1 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{7}x^4, -\frac{6}{13}x^3 + 8, \frac{14}{19}x^5 + 6x^7 - \frac{10}{7}x^4,$$

$$\frac{5}{19}x^5 + 12x^2 - 3 - \frac{6}{13}x^3 \text{ और } 2x^5 - \frac{1}{13}x^4 - \frac{2}{7}x^4$$

4 समान पदों को एकत्रित कीजिए और जोड़िए

$$(i) \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^4 - \frac{3}{2}x^5 \right) - \left(\frac{1}{8}x^5 - \frac{7}{2}x^2 + x^3 \right)$$

$$(ii) \left(\frac{7}{6}x + 7 \right) - \left(\frac{1}{20}x^3 + \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{9}x^4 - \frac{1}{4}x^2 \right)$$

$$(iii) (x^2 - x^3 + x^4 + x^6) - (-1 - x - 2x^3 - x^5)$$

$$(iv) (1.2a^4 + 3a^3 - 2a^2 - 0.7a + 15) + (0.7a - 14 + a^2 - 3a^3 + 0.8a^4)$$

$$(v) \left(3x^2 + \frac{3}{4}x - 3 \right) + \left(\frac{12}{11}x^2 + \frac{5}{2} + \frac{13}{4}x \right)$$

$$\left(\frac{1}{11}x^2 + \frac{17}{4}x + 5x^4 \right)$$

$$(vi) \left(\frac{3}{4}x^3 - 3 - 5x^2 \right) - \left(\frac{8}{5}x + \frac{13}{5}x^2 + \frac{11}{4}x^3 \right)$$

$$+ \left(8 + 3x - \frac{2}{5}x^2 \right) - \left(13x^2 - \frac{3}{5}x - 5 \right)$$

$$(vii) \left(7x^4 + \frac{21}{13}x^3 + 12x^2 - 3 \right) \left(\frac{25}{4}x^4 - \frac{13}{2} - \frac{5}{2}x^2 \right) \\ \left(\frac{3}{4}x^4 - 10 + \frac{1}{2}x^2 \right) + \left(3x^6 + \frac{5}{2} + \frac{5}{13}x^3 \right)$$

5. $\frac{1}{6}x^7 + \frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{2}$ और $x^6 + \frac{5}{4}x^5 - \frac{3}{2}x^4$ के योग में से $\frac{1}{3}x^7 + \frac{2}{3}x^6 + \frac{3}{4}x - 1$ को घटाइए।

6. $7x^3 + 13x^2 - 19x - 25$, $17 - 15x$ और $10x^2 - 4x^3$ के योग में से $42 - 11x^3 - 2x^2 + 4x$ और $\frac{5}{2}x^2 + 9x^3 - 42 - 4x$ का योग घटाइए।

7. आइए, बहुपद $\frac{1}{5}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{12}x + \frac{5}{24}$ को P लिखें। परिकल्पित कीजिए।

(i) $P - P$

(ii) $P + P + P + P$ । [हम इस योग को $4P$ लिखते हैं।]

(iii) $P - (P + P + P)$

8. आइए, बहुपद $\frac{1}{3}x^6 + \frac{7}{2}x^5 - \frac{3}{4}x^4$ को P , बहुपद $\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 +$

$2x$ को Q तथा बहुपद $\frac{1}{7}x^6 + \frac{3}{4}x^2 - 4$ को R लिखें। परिकल्पित कीजिए।

(i) $P + Q$

(ii) $Q + P$

(iii) $(P + Q) + R$

(iv) $P + (Q + R)$

- 9 यदि P बहुपद $4x^4 - \frac{7}{4}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x + 1$ को, Q बहुपद $\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$ को, R बहुपद $\frac{9}{2}x^4 + \frac{3}{4}x^3 + x^2 - \frac{5}{2}x$ को तथा S बहुपद $11x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3$ को व्यक्त करता है तो निम्न को परिकल्पित कीजिए :

(i) $P+P$ । [हम इस योग को $2P$ से व्यक्त करते हैं ।]

(ii) $P+Q+R+S$

(iii) $P-2Q+4R$

(iv) $R-S+P$

10. $\frac{5}{2}x^3 - 3x + x^4 - \frac{1}{2}x^2$, $8 + 3x^4$, $-\frac{7}{2}x^3 + \frac{11}{2}x^2$ और $\frac{13}{2}x^2 - 2x + 5$ के योग में से $4x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1$ और $x^3 + 3 - \frac{3}{2}x^2$ का योग घटाइए ।

11. $\frac{12}{7}x^5 - \frac{8}{9}x^4 - x^3 + 2x + 5$ प्राप्त करने के लिए $\frac{15}{7}x^5 - \frac{2}{9}x^4 - 3x + 5$ में क्या जोड़ना चाहिए ?

12. $19x^4 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{14}{5}x^2 - 3x$ प्राप्त करने के लिए $17x^4 - \frac{17}{4}x^3 + \frac{11}{2}$ में से क्या घटाना चाहिए ?

६.५ बीजीय व्यंजक का मान ज्ञात करना

उदाहरण 1 बीजीय व्यंजकों का मान ज्ञात करना पहले से ही जानने है। हम व्यंजक x का नए का मान प्रतिस्थापित (substitute) कर देते हैं। यदि बीजीय व्यंजक का गुणांक परिमेय संख्याएँ हों तो उसका मान भी इसी प्रकार जाना जा सकता है। हम बीजीय व्यंजक में x का मान प्रतिस्थापित कर देते हैं। उदाहरणार्थ, व्यंजक $\frac{4}{7}x + \frac{3}{16}x^2$ पर विचार कीजिए।

इसका उदाहरणार्थ, $x = 1$ पर मान व्यंजक में $x = 1$ प्रतिस्थापित करके प्राप्त होता है। इस प्रकार हम निम्न प्राप्त होता है

$$\begin{aligned} & \frac{4}{7} (1) + \frac{3}{16} (1)^2 \\ & \frac{4}{7} + \frac{3}{16} = \frac{4 \cdot 16 + 7 \cdot 3}{112} \\ & \frac{43}{112} \end{aligned}$$

इसी प्रकार, उदाहरणार्थ, $x = \frac{7}{4}$ पर इसका मान निम्न है

$$\begin{aligned} & \frac{4}{7} \left(\frac{7}{4} \right) + \frac{3}{16} \left(\frac{7}{4} \right)^2 \\ & 1 + \frac{147}{256} = \frac{403}{256} \end{aligned}$$

हम कुछ और उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 $x = \frac{1}{2}$ और $x = 2$ पर, $2x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + 7x^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $x = \frac{1}{2}$ पर, हम ज्ञाते हैं कि मान निम्न है

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 7\left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} + \frac{4}{96} + \frac{7}{8} \\ = \frac{37}{24} \end{aligned}$$

$x = 2$ पर, हमें निम्न मान प्राप्त होता है

$$\begin{aligned} 2(-2) - \frac{3}{2}(-2)^2 + \frac{4}{3}(-2)^3 + 7(-2)^4 \\ = -4 - 6 - \frac{128}{3} + 56 \\ = -\frac{326}{3} \end{aligned}$$

उदाहरण 2 : $x = 0, 1$ और $-\frac{3}{2}$ पर $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^x$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $x = 0$ पर, हमें मान $\frac{1}{2(0)} = \frac{1}{3}$ प्राप्त होता है।

$x = 1$ पर, मान $\frac{1+1}{2(1)} = \frac{1}{3}$ है।

$x = -\frac{3}{2}$ पर, मान $\frac{\frac{3}{2}+1}{2\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ है।

उदाहरण 3 : $y = -4$ पर बहुपद $\frac{4}{5}y^3 - \frac{1}{3}y^2 + 6y - \frac{1}{4}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

हल : हम बहुपद में $y = -4$ प्रतिस्थापित करते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं :

$$\begin{aligned} & \frac{4}{5}(-4)^3 - \frac{1}{3}(-4)^2 + 6(-4) - \frac{1}{4} \\ &= -\frac{256}{5} - \frac{16}{3} - 24 - \frac{1}{4} \\ &= -\frac{4847}{60} \end{aligned}$$

6.6 बहुपद का शून्य

बहुपद $3+2x$ पर विचार कीजिए । आइए $x = -\frac{3}{2}$ पर इसका मान ज्ञात करें ।

$x = -\frac{3}{2}$ प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\begin{aligned} & 3 + 2\left(-\frac{3}{2}\right) \\ &= 3 - 3 = 0 \end{aligned}$$

आइए अब बहुपद $-\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}$ को लें और $x = \frac{9}{4}$ के लिये इसका मान ज्ञात करें । हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{3}\left(\frac{9}{4}\right) + \frac{3}{2} \\ &= -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0 \end{aligned}$$

यह संख्या जिसके लिए बहुपद का मान शून्य हो बहुपद का एक शून्य (zero) कहलाती है। इस प्रकार, $\frac{3}{2}$ बहुपद $3 + 2x$ का शून्य है। $\frac{9}{4}$ बहुपद

$\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}$ का शून्य है।

बहुपद के शून्य ज्ञात करने की समस्या बीजगणित में एक महत्वपूर्ण समस्या है। आइए x में प्रथम घात के बहुपद पर विचार करें। क्या आपको याद है कि ऐसे बहुपद को हम किस प्रकार लिखते हैं? यह $a + bx$ के रूप में लिखा जाता है। a और b क्या हैं? ये परिमेय संख्याएँ हैं। निस्मदेह, b अवश्य ही शून्येतर होना चाहिए। (क्यों?) हम इसका $x = -\frac{a}{b}$ पर मान ज्ञात करते हैं। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\begin{aligned} a + b\left(-\frac{a}{b}\right) \\ = a - a = 0 \end{aligned}$$

हम देखते हैं कि $x = -\frac{a}{b}$ पर इसका मान शून्य है। हम कहते हैं कि $-\frac{a}{b}$, x में प्रथम घात के बहुपद $a + bx$ का शून्य है।

आइए एक उदाहरण लें।

उदाहरण : बहुपद $\frac{1}{2} - 2x$ का शून्य ज्ञात कीजिए। अपने उत्तर की जाँच भी कीजिए।

हल : $\frac{1}{2} - 2x$, x में प्रथम घात का एक बहुपद है। यह $a + bx$ के रूप का है।

हम देखते हैं कि यहाँ $a = \frac{1}{2}$ तथा $b = -2$ है।

हम यह भी देखने लें कि $b \neq 0$ है।

हम ध्यान रखें कि $x = \frac{a}{b}$ पर इसका मान शून्य होगा।

अर्थात्, $\Delta = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ पर इसका मान शून्य होगा।

अतः, बहुपद $\frac{1}{2} - 2x$ का शून्य $\frac{1}{4}$ है।

आइए, जाँच करें कि वस्तुतः ऐसा ही सत्य है। हम $\frac{1}{2} - 2x$ में $x = \frac{1}{4}$ प्रतिस्थापित करते हैं। हमें निम्न प्राप्त होता है

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} - 2\left(\frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

x में उच्च घातों के बहुपदों के शून्य ज्ञात करने की विधियाँ इतनी सरल नहीं हैं। उनका अगली कक्षाओं में उल्लेख किया जाएगा।

प्रश्नावली 6.3

1. निम्न में से प्रत्येक बीघीय व्यंजक का चर के दिए हुए मानों पर मान ज्ञात कीजिए।

(i) $-5x^4$, $x = 0, 2, -2$ और $\frac{1}{2}$ पर

$$(ii) \quad \frac{3}{2}x^2 - 7x + x - 2, \quad x = 2 \text{ और } 4 \text{ पर}$$

$$(iii) \quad \frac{13}{7} - \frac{19}{28}x^3; \quad x = 0 \text{ पर}$$

$$(iv) \quad \frac{6x^2}{x-3} - 5; \quad x = 1, \quad \frac{1}{3} \text{ और } 2 \text{ पर}$$

$$(v) \quad \frac{7x^3 + x}{x^2 - x + 8} - \frac{3}{2}; \quad x = 0 \text{ और } 2 \text{ पर}$$

2. निम्न में से प्रत्येक बहुपद का चर के दिए हुए मानों पर मान ज्ञात कीजिए,

$$(i) \quad 3x^4 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{2}x + 1; \quad x = -1 \text{ और } 1 \text{ पर}$$

$$(ii) \quad z^3 + \frac{1}{5}z^2 - \frac{2}{5}z - \frac{1}{4}, \quad z = 0 \text{ पर}$$

$$(iii) \quad y^3 + \frac{7}{8}y^2 + \frac{3}{2}y + 1, \quad y = -2 \text{ पर}$$

$$(iv) \quad x^2 - 1; \quad x = 0, \quad 1 \text{ और } 1 \text{ पर}$$

$$(v) \quad x^5 + 1; \quad x = -1 \text{ और } \frac{1}{2} \text{ पर}$$

$$(vi) \quad \frac{18}{7}x^3 + \frac{1}{7}x - x^2 + 1; \quad x = 7, 0 \text{ और } 1 \text{ पर}$$

3. $x = 10$ पर $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ का मान ज्ञात कीजिए और जाँच कीजिए कि आपका उत्तर प्रथम 10 घनपूर्णांकों के योग के बराबर है।

- 4 निम्न बहुपदों में से प्रत्येक का शून्य ज्ञात कीजिए। अपने उत्तर की जाँच भी कीजिए।

(i) $25x - 10$

(ii) $\frac{6}{7}x + 3$

(iii) $8x - \frac{13}{2}$

(iv) $\frac{3}{4}x$

(v) $\frac{11}{8} - \frac{3}{2}x$

5. विश्राम से गिरते हुए एक पिंड की समय t पर दूरी s , बीजीय व्यंजक $49 t^2$ से निरूपित की जाती है। $t = 3, 5, 8$ और 20 पर दूरी ज्ञात कीजिए।
[संकेत : $t = 3, 5, 8$ और 20 पर व्यंजक $49 t^2$ का मान ज्ञात कीजिए।]

मुख्य संकल्पनाएँ

परिमेय गुणकों के एक चर में

बीजीय व्यंजक

परिमेय गुणकों के एक चर बहुपद

बहुपद की घात

बहुपदों का योग और व्यवकलन

बीजीय व्यंजक का मान

बहुपद का शून्य

एकक VII

एक चर में प्रथम घात समीकरण

इस एकक में हम सीखेंगे कि परिमेय गुणांकों की एक चर में प्रथम घात समीकरणों (first degree equations in one variable) को किस प्रकार हल किया जाता है। समीकरण की तुलना एक तुला से की गई है, जिसका समीकरणों को हल करने के लिए नियमों को ज्ञात करने में अभिप्रेरण के रूप में प्रयोग किया गया है। अंत में, एक चर में प्रथम घात समीकरणों को हल करने के ज्ञान का उन परिमेय संख्याओं को ज्ञात करने में प्रयोग किया गया है जिनके दशमलव निरूपण दिए हुए असांत आवर्ती दशमलव हैं।

7.1 पुनरावलोकन

आप पिछली कक्षाओं में पढ़े हुए एकक 'समीकरणों का परिचय' का पुनरावलोकन कीजिए। विशेष रूप से आपको निम्न संकल्पनाओं को दोहराना चाहिए :

प्रतिबन्धित समीकरण अथवा समीकरण।

समीकरण के हल अथवा मूल (roots)।

पूर्णांकीय गुणांकों की एक चर में प्रथम घात समीकरणों को हल करने के नियम।

7.2 परिमेय गुणांकों के समीकरण

अब हम परिमेय गुणांकों वाले समीकरणों का अध्ययन करते हैं। आपको याद होगा कि एक समीकरण, समता (equality) का एक ऐसा कथन होता है जिसमें एक अज्ञात* (unknown) राशि होती है।

परिमेय गुणांकों के समीकरणों के कुछ उदाहरण निम्न हैं :

$$(i) \quad 2x + \frac{1}{2} = 3$$

$$(ii) \quad -\frac{1}{2}y + 1 = 3y + \frac{4}{3}$$

$$(iii) \quad \frac{1}{3}x - 17 = \left[2x - \left(x - \frac{15}{6} \right) \right], \text{ इत्यादि।}$$

इन समीकरणों में से प्रत्येक में चर की घात 1 है। हम कहते हैं कि प्रत्येक, दिए हुए चर में, एक प्रथम घात समीकरण है।

इस पुस्तक में हम परिमेय गुणांकों की एक चर में प्रथम घात समीकरणों का अध्ययन करेंगे।

7.3 समीकरण हल करना

आपको याद होगा कि समीकरण की एक तुला से तुलना की जा सकती है। इसके दोनों पक्ष (sides) तुला के दोनों पलड़े (pans) हैं तथा समता संकेत (equality sign) का अर्थ है कि दोनों पलड़े संतुलन में हैं। हमने उपर्युक्त का समीकरणों को हल करने के लिए नियमों को ज्ञात करने में अभिप्रेरण के रूप में

* कुछ वैश्वक 'अज्ञात' के स्थान पर 'चर' (variable) शब्द का प्रयोग करते हैं। हम दोनों शब्दों को अद्वय-वद्वय करके प्रयोग करेंगे।

प्रश्न किया था। क्या आपको ये नियम याद हैं? नियम ये हैं कि कोई समीकरण हल करने के लिए हम

- (1) समीकरण के दोनों पक्षों में एक ही संख्या जोड़ सकते हैं,
- (2) समीकरण के दोनों पक्षों में से एक ही संख्या घटा सकते हैं,
- (3) समीकरण के दोनों पक्षों को एक ही संख्या से गुणा कर सकते हैं तथा
- (4) समीकरण के दोनों पक्षों को एक ही (शून्येतर) संख्या से भाग दे सकते हैं।

हम इन नियमों में से एक या अधिक का प्रयोग करते हैं और गैर चरण पर आने का प्रयास करते हैं कि अज्ञात संख्या (अर्थात् चर) स्वयं समीकरण के एक पक्ष के रूप में प्रकट हो जाए।

हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1: $2x + \frac{1}{2} = 3$ को हल कीजिए।

हल: हम समीकरण के दोनों पक्षों में से $\frac{1}{2}$ घटाते हैं (नियम 2)।

हमें निम्न प्राप्त होता है -

$$2x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 3 - \frac{1}{2}$$

अर्थात्, $2x = \frac{5}{2}$ (1)

अब हम (1) के दोनों पक्षों को 2 से विभाजित करते हैं (नियम 4)। दूसरे पक्षों में, हम दोनों पक्षों को $\frac{1}{2}$, जोकि 2 का व्युत्क्रम है, से गुणा करते हैं। हमें निम्न प्राप्त होता है -

$$\frac{1}{2} \times 2x = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2}$$

अर्थात्, $x = \frac{5}{4}$

एक प्रकार, $x = \frac{5}{4}$ दो हुई समीकरण का एक हल है।

[निरसदेह, हमें x के इस मान की दो हुई समीकरण में प्रतिस्थापित करके जाँच अवश्य करनी चाहिए। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\text{वाम पक्ष} \quad 2 \left(\frac{5}{4} \right) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 = \text{दक्षिण पक्ष}]$$

उदाहरण 2 : $\frac{1}{2}x + 1 = 3y + \frac{4}{3}$ को हल कीजिए।

हल : हम $3y$ का वाम पक्ष में स्थानापन्न* (transpose) करते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं

$$\frac{1}{2}x - 3y + 1 = \frac{4}{3}$$

$$\text{अर्थात्,} \quad -\frac{5}{2}x + 1 = \frac{4}{3}$$

अब हम 1 को दक्षिण पक्ष में ले** जाते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं :

$$-\frac{5}{2}x = \frac{4}{3} - 1$$

$$\text{अर्थात्,} \quad -\frac{5}{2}x = \frac{1}{3} \quad (1)$$

* पर के स्थानापन्न करने का अर्थ केवल उसका चिह्न बदलकर उसे दूसरे पक्ष में ले जाना है।

**जब हमें अधिक अभ्यास हो जाए तो हम इन दोनों धरनों को निम्न प्रकार से एक ही धरण में समीकृत कर सकते हैं।

$$\frac{1}{2}x + 1 = 3y + \frac{4}{3}$$

$3y$ को वाम पक्ष और 1 को दक्षिण पक्ष में ले जाने पर हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\frac{1}{2}x - 3y = \frac{4}{3} - 1, \text{ इत्यादि।}$$

(1) के दोनों पक्षों को $-\frac{2}{5}$ से गुणा करने पर (नियम 3) हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$y = \frac{1}{3} \left(-\frac{2}{5} \right) = -\frac{2}{15}$$

इस प्रकार, $y = -\frac{2}{15}$ दी हुई समीकरण का एक हल है।

[पाठक यह जाँच करें कि वस्तुतः यह ऐसा ही है।]

उदाहरण 3 : $\frac{1}{3}x - 17 = [2x - (x - \frac{15}{16})]$ को हल कीजिए।

$$\text{हल : } \frac{1}{3}x - 17 = 2x - x + \frac{15}{16}$$

$$\text{अर्थात्, } \frac{1}{3}x - 17 = x + \frac{15}{16}$$

x को बायें पक्ष और 17 को दक्षिण पक्ष में ले जाने पर हमें निम्न प्राप्त होगा है :

$$\frac{1}{3}x - x = \frac{15}{16} + 17$$

$$\text{अर्थात्, } -\frac{2}{3}x = \frac{287}{16} \quad (1)$$

(1) के दोनों पक्षों को $-\frac{3}{2}$ से गुणा करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$x = -\frac{287}{16} \times \frac{3}{2} = -\frac{861}{32}$$

इस प्रकार, $x = -\frac{861}{32}$ दी हुई समीकरण का एक हल है।

उदाहरण 4 : $\frac{2+y}{2y} = \frac{5}{3}$ को हल कीजिए।

हल : आपको पता होगा कि दो परिमेय सख्याएँ $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ तभी और केवल तभी समान होती हैं जबकि $ad = bc$ हो। अतः हम दो हुई समीकरण में क्रॉस गुणन (cross-multiplication) करते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं :

$$6(2+y) = 5(2y-3)$$

अर्थात्, $12 + 6y = 10y - 15$

$6y$ को दक्षिण पक्ष और 15 को बाय पक्ष में ले जाने पर,

$$27 = 4y$$

इस प्रकार, $\frac{27}{4} = y$

अतः, $y = \frac{27}{4}$ दी हुई समीकरण का एक हल है।

प्रश्नावली 7.1

निम्न समीकरणों में से प्रत्येक को हल कीजिए। समीकरण में प्रतिस्थापित करके अपने उत्तर की जाँच कीजिए।

1. $\frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$

2. $3x + 4 = -\frac{4}{3}x + 9$

3. $\frac{2}{3}y + 5 = \frac{1}{7}$

एक चर में प्रथम घात समीकरण

$$4 \quad \frac{1}{9}z + \frac{2}{9}z + 1 = \frac{2}{9}$$

$$5 \quad (2x - 1) + \frac{3}{10}(5x - 7)$$

$$6 \quad \frac{5}{2}(3t - 2) = \frac{1}{3}(7t + 6)$$

$$7 \quad \frac{17}{x} + \frac{3}{2} = 16$$

$$8 \quad y = \frac{11}{13} - 2y = 15$$

$$9 \quad \frac{2}{3}v = \frac{5}{7}y + \frac{2}{21}$$

$$10 \quad \frac{4}{5} \left(\frac{2}{9}x + 1 \right) - 3 = \frac{1}{9}x$$

$$11 \quad 3(0.35u + 0.34) = 1.14u - \frac{3}{50}$$

$$12 \quad 0.6x + \frac{4}{5} = 0.28x + 1.16$$

$$13 \quad 225 \left(\frac{2}{25}v - \frac{2}{5} \right) = 2.9v - \left(25 - \frac{21}{10}v \right)$$

$$14 \quad (42x - 42) = \frac{34}{5} (19 - 30x) - 111$$

$$15 \quad \frac{1}{5}9v = 19 - \frac{3}{8}y$$

$$16. \quad \frac{5}{3}x - \left(3 - \frac{8}{3}x \right) - 12 \left[\frac{5}{3}x - \left(15 + \frac{10}{3}x \right) \right]$$

$$17. \quad x \left[4x + 2 - \left(\frac{15}{2}x + 4 \right) \right] = 3 - \frac{7}{2}x$$

$$18. \quad \frac{1}{y+7} - \frac{3}{5}$$

$$*19. \quad \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{y}} = \frac{5}{8}$$

$$20. \quad \frac{1 - \frac{1}{4} - \frac{1-x}{2}}{\frac{3}{4}} = 1$$

$$21. \quad \frac{5}{4} - \frac{3x}{2} = \frac{3}{5} - \frac{x}{5} - \frac{7}{5} - \frac{4x}{5}$$

$$22. \quad 2 \left[\frac{x}{2} - \frac{3}{2} \right] + \frac{5}{6} = 3x + 2 \left(\frac{3}{4}x - \frac{2}{3} \right)$$

$$23. \quad \frac{9}{4} \left[\left(\frac{2}{3} + \frac{16}{3}x \right) - \frac{8}{3} \left(\frac{4}{4} - \frac{x}{4} \right) \right] = \frac{9}{4} - 2x - \left(\frac{3}{2} - 3x \right)$$

$$24. \quad \frac{5}{7y} - \frac{3}{14} = \frac{7}{2y} + 3$$

$$25. \quad \frac{2}{u} - \frac{11}{10} = \frac{2}{5} + \frac{1}{u}$$

$$26. \quad \frac{4y+3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3y-1}{2}$$

$$27. \quad \frac{3t-2}{2} + \frac{2t-3}{3} = 2t + \frac{5}{6}$$

7.4 समस्याएँ हल करने में समीकरणों का प्रयोग

अब हम कुछ शब्द समस्याओं (word problems) पर विचार करेंगे जिन्हें समीकरणों के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, लगभग 180 ई० पू० के एक मिस्त्रवासी अल्फ़स द्वारा प्रतिपादित समस्या पर विचार कीजिए। [पुस्तक I का एकक VIII भी देखिए।]

एक संख्या और उसका दो-तिहाई और उसका आधा और उसका सातवाँ भाग 37 के बराबर है। संख्या ज्ञात कीजिए।

आइए वांछित संख्या को x से व्यक्त करें। हम बताया गया है कि

$$x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}x = 37 \quad (1)$$

इस प्रकार हमने एक शब्द समस्या को समीकरण के रूप में व्यक्त कर लिया है जिसे हम सरलता से हल कर सकते हैं। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\frac{42x + 28x + 21x + 6x}{42} = 37$$

अर्थात्, $\frac{97x}{42} = 37$

इस प्रकार, $x = \frac{37 \cdot 42}{97} = \frac{1554}{97}$

अतः वांछित संख्या $\frac{1554}{97}$ है।

हम कुछ और उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : दो संख्याओं, जिनमें एक दूसरी की दो-तिहाई है, का योग $\frac{28}{3}$ है।

संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : आइए इनमें से एक समस्या को, उदाहरणार्थ, x से व्यक्त करें। तब, दूसरी समस्या $\frac{2}{3}x$ होगी।

हमें दिया है कि इनका योग $\frac{28}{3}$ है।

$$\text{अर्थात्, } x + \frac{2}{3}x = \frac{28}{3} \quad (1)$$

इस प्रकार हमने दी हुई शब्द समस्या को एक समीकरण के रूप में परिवर्तित कर लिया है जिसे हम सरलता से हल कर सकते हैं। हमें निम्न प्राप्त होता है -

$$\frac{5}{3}x = \frac{28}{3}$$

$$\text{जिससे, } x = \frac{28}{5}$$

अतः दूसरी समस्या $\frac{2}{3}\left(\frac{28}{5}\right)$ अर्थात् $\frac{56}{15}$ है।

[पाठक को चाहिए कि यह जाँच करे कि $\frac{28}{5}$ और $\frac{56}{15}$ का योग वस्तुतः $\frac{28}{3}$ है। साथ ही यह भी जाँच करे कि $\frac{56}{15}$, $\frac{28}{5}$ का दो-तिहाई है।]

उदाहरण 2 : रवि की वर्तमान आयु अपने पिता की आयु की एक-तिहाई है। 12 वर्ष बाद उसकी आयु पिता की आयु की आधी हो जाएगी। उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हल : यदि हम यह मान लें कि पिता की वर्तमान आयु, उदाहरणार्थ, x वर्ष है तो रवि की आयु $\frac{1}{3}x$ वर्ष होगी।

12 वर्ष बाद,

$$\text{पिता की आयु} = (x + 12) \text{ वर्ष}$$

$$\text{रवि की आयु} = \left(\frac{1}{3}x + 12\right) \text{ वर्ष}$$

परन्तु हमें दिया है कि 12 वर्ष बाद रवि की आयु पिता की आयु की आधी होगी।

$$\text{अतः,} \quad \frac{1}{3}x + 12 = \frac{1}{2}(x + 12) \quad (1)$$

अब हमने एक समीकरण प्राप्त करली है जिसे हम सरलता में हल कर सकते हैं। (1) में पदों का स्थानांतरण करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है

$$\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x = 6 - 12$$

$$\text{अर्थात्,} \quad \frac{1}{6}x = -6$$

$$\text{जिससे,} \quad x = 36$$

इस प्रकार, रवि की वर्तमान आयु 12 वर्ष है जबकि उसके पिता की वर्तमान आयु 36 वर्ष है।

[पाठक को चाहिए कि वह जाँच करे कि 12 वर्ष बाद रवि की आयु अपने पिता की आयु की आधी हो जाएगी।]

उदाहरण 3 : एक आयत की चौड़ाई उसकी लम्बाई की दो-तिहाई है। यदि आयत का परिमाण 90 मीटर है, तो उसकी लम्बाई और चौड़ाई ज्ञान कीजिए।

हल : मान लीजिए आयत की लम्बाई x मीटर है।

$$\text{तब उसकी चौड़ाई} = \frac{2}{3}x \text{ मीटर}$$

$$\text{अतः, परिमाण} = x + \frac{2}{3}x + x + \frac{2}{3}x$$

परन्तु परिमाण 90 मीटर दिया हुआ है। इस प्रकार,

$$x + \frac{2}{3}x + x + \frac{2}{3}x = 90$$

$$\begin{aligned}
 \text{या,} & \quad 10x = 90 \\
 \text{अर्थात्,} & \quad 10x = 270 \\
 \text{या,} & \quad x = 27 \\
 \text{इस प्रकार,} & \quad \frac{2}{3}x = 18
 \end{aligned}$$

अतः आयत की लम्बाई और चौड़ाई क्रमशः 27 मीटर और 18 मीटर है।

[हम इस बात को जाँच कर सकते हैं कि चौड़ाई 18 मीटर, लम्बाई 27 मीटर की दो-तिहाई है। साथ ही, परिमाण $= 27 \times 18 + 27 \times 18 = 90$ मीटर है।]

उदाहरण 4 : एक मोटर-नाव (motor-boat) की अधोप्रवाह (down-stream) जाते हुए चाल 26.8 कि०मी०/घंटा है तथा ऊर्ध्वप्रवाह (upstream) जाते हुए चाल 15.6 कि०मी०/घंटा है। शांत जल में मोटर नाव की चाल तथा प्रवाह की चाल ज्ञात कीजिए।

हल : अधोप्रवाह जाते हुए, नाव की चाल अधिक है क्योंकि यह प्रवाह की धारा की दिशा में जा रही है। परन्तु ऊर्ध्वप्रवाह जाते हुए वह धारा के विरुद्ध जाती है और इसलिये उसकी चाल उम चाल में कम होगी और वह शांत जल में चल रही होती।

आइए कि०मी०/घंटा में प्रवाह की चाल को y से व्यक्त करें। तब, नाव की शांत जल में चाल $26.8 - y$ या $15.6 + y$ है।

$$\text{अर्थात्,} \quad 26.8 - y = 15.6 + y$$

$$\text{इस प्रकार,} \quad 11.2 = 2y$$

$$\text{या,} \quad y = 5.6$$

अतः प्रवाह की चाल 5.6 कि०मी०/घंटा है।

साथ ही, शांत जल में नाव की चाल $(26.8 - 5.6)$ या $(15.6 + 5.6)$ कि०मी०/घंटा है। हम देखते हैं कि प्रत्येक परिकलन से यह चाल 21.2 कि०मी० प्रति घंटा आती है।

ध्यान दीजिए कि हमने विभिन्न प्रकार की चार जातों समस्याओं को गर्भो-
कर्मों के पदों में व्यक्त करके हल किया है। आपको याद होगा कि इन समस्याओं
अर्थात् प्रश्नों को समीकरणों के पदों में व्यक्त करने की कोई निश्चित विधि नहीं
है। फिर भी, कुछ बाने जिनमें उपयोगी संकेत मिल सकते हैं, निम्न हैं :

1. प्रश्न को बार-बार पढ़िए जब तक कि आप यह न समझ लें कि क्या
दिया है और क्या ज्ञात करना है।
2. अज्ञात को किसी अक्षर x या y या z , इत्यादि से व्यक्त कीजिए।
3. (क) प्रश्न को धीरे-धीरे, एक एक वाक्यानुसार गणित की भाषा में
परिवर्तित कीजिए।
(ख) वे राशियाँ निर्धारित कीजिए जो कि बराबर हैं और उनमें एक
समीकरण बनाइए।
4. अज्ञात के लिए समीकरण को हल कीजिए।
5. जाँच कीजिए कि प्राप्त उत्तर प्रश्न में दिए हुए प्रतिबन्धों को संतुष्ट
करता है या नहीं।

प्रश्नावली 7 2

1. 30 विद्यार्थियों की एक कक्षा में, लड़कियों की संख्या लड़कों की संख्या
का $\frac{1}{5}$ है। कक्षा में लड़कों की संख्या ज्ञात कीजिए।
2. इन्दर स्वयं के और अपने 5 वर्षीय पुत्र के दिल्ली से कुश्नोब तक के टिकट
के लिए 13.35 रु० देना है। यदि 12 वर्ष से कम के बच्चों का आधा
किराया लगता है, तो दिल्ली से कुश्नोब का एक व्यक्ति का पूरा किराया
ज्ञात कीजिए।
3. एक संख्या दो अंकों की है। इकाई के स्थान पर अंक 8 है। यदि हम अंकों
को बदल दें तो हम प्रकार दूसरी संख्या पहली संख्या का $\frac{7}{4}$ का भाग है।
इकाई के स्थान पर अंक ज्ञात कीजिए।

- 4 किमी त्रिभुज $4/30^\circ$ का एक कोण 1 अन्य दोन कोणों के योग के बराबर है। साथ ही, कोणों 18 और 6° का अनुपात 4 : 5 है। तीनों कोण ज्ञात कीजिए।
- [सकेत : त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है।]
- 5 किमी गमद्विबाहु त्रिभुज का आधार उसकी प्रत्येक समान भुजा का तीन-चौथाई है। त्रिभुज का परिमाण 22 मेट्रीमीटर है। भुजाएँ ज्ञात कीजिए।
- 6 एक आदमी ने अपनी सम्पत्ति का एक-तिहाई अपने पुत्र के लिए, एक-चौथाई अपनी पुत्री के लिए तथा शेष अपनी पत्नी के लिए छोड़ा। यदि पत्नी के हिस्से का मूल्य 32000 रु० हो तो उस आदमी ने कितना रुपया छोड़ा था ?
- 7 किमी परिमेय मर्या का अंश हर से 7 छोटा है। यदि हर 9 बढ़ा दिया जाए और अंश 2 बढ़ा दिया जाए तो हमें पुनः वही परिमेय मर्या प्राप्त हो जाती है। वह मर्या ज्ञात कीजिए।
8. महेश्वर 5600 रु० का कुछ भाग 3% वार्षिक व्याज की दर से तथा शेष भाग 5% वार्षिक व्याज की दर से जमा कराना है। यदि इसका एक वर्ष का कुल व्याज 27580 रु० था, तो उसने प्रत्येक दर पर कितना कितना रुपया जमा कराया ?
- 9 एक मेनकृद पनियोमिता में तीन पुरस्कार इस प्रकार दिए जाने हैं कि उनका कुल योग 150 रु० है। यदि दूसरे पुरस्कार का मूल्य पहले पुरस्कार के मूल्य का $\frac{5}{6}$ है तथा तीसरे पुरस्कार का मूल्य दूसरे पुरस्कार के मूल्य का $\frac{1}{2}$ है, तो तीनों पुरस्कारों में से प्रत्येक का मूल्य ज्ञात कीजिए।
- *10. एक डाकिया डाकघर से एक गाँव तक पहुँचने में 35 मिनट लेता है। जब वह डाक देकर वापिस लौटता है तो वह अपनी चाल 0.6 कि० मी०/घंटा बढ़ा देता है और डाकघर तक पहुँचने में 30 मिनट लेता है। डाकघर और गाँव के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए। डाकिया की दोनों चालें भी ज्ञात कीजिए।

7.5 परिमेय संख्याओं के रूप में दशमलव

हम अनुच्छेद 5.3 में देख चुके हैं कि एक परिमेय संख्या को एक सात अथवा एक असात आवर्ती दशमलव के रूप में निरूपित किया जा सकता है। उनके त्रि शीर्ष के बारे में आप क्या सोचते हैं ?

मान लीजिए कि हमारे पास एक सात दशमलव, उदाहरणार्थ, 0.23 है। क्या हम एक ऐसी परिमेय संख्या ज्ञात कर सकते हैं जिसका दशमलव निरूपण 0.23 है ? आप यह अवश्य ही जानते हैं कि

$$0.23 = \frac{2}{10} + \frac{3}{100} = \frac{23}{100}$$

[क्या अब आप एक दशमलव को परिमेय संख्या में बदलने के नियम का कारण देख रहे हैं ? क्या आपको यह नियम याद है ? नियम है कि आप हर में 1 लिखते हैं और उसमें दशमलव बिंदु के दाईं ओर जितने अंक हैं उतने शून्य लगा देते हैं। अंश में आप दो हुई संख्या को बिना दशमलव बिंदु के लिखते हैं।] आइए एक और उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : निम्न में से प्रत्येक को एक परिमेय संख्या में बदलिए :

$$0.0573, 28.321, \text{ -- } 6.0607$$

हल : हम नियम का प्रयोग करते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं :

$$0.0573 = \frac{573}{100000}$$

$$28.321 = \frac{28321}{1000}$$

$$\text{--} 6.0607 = \text{--} \frac{60607}{10000}$$

अब मान लीजिए हमारे पास एक असात आवर्ती दशमलव, उदाहरणार्थ, 0.333... है। हम यह परिमेय संख्या किस प्रकार ज्ञात करें जिसका दशमलव

निरूपण ॥ ३ ॥ है ? स्पष्ट है कि उस नियम का जो हमने सात दशमलवों के लिए मोत्रा है यहाँ प्रयोग नहीं किया जा सकता ।

अ.इए. दि.इए. आव.ों दशमलव को, उदाहरणार्थ, x से व्यवहृत करें ।

अर्थात् मान लीजिए कि $x = 0.333 \dots$ (1)

हम देखते हैं कि दशमलव बिंदु के दाईं ओर केवल पुनरावृत्ति वाला अंक ही आ रहा है ।

अ.इए. (1) के दोनों पक्षों को 10 से गुणा करें । हमें निम्न प्राप्त होता है .

$$10x = 3.333 \dots \quad (2)$$

(2) में से (1) को घटाने पर,

$$9x = 3$$

जिससे,
$$x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

इस प्रकार, वांछित परिमेय संख्या $\frac{1}{3}$ है जिसका दशमलव निरूपण 0.3 होता है ।

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि एक दि.इए. असांत आवर्ती दशमलव निरूपण वाली परिमेय संख्या ज्ञात करने के लिए हम एक बार में प्रथम घात समीकरणों के ज्ञान का उपयोग करते हैं ।

अ.इए. कुछ और उदाहरण ले ।

उदाहरण 2 : वह परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए, जिसका दशमलव निरूपण 2.34 है ।

हल : मान लीजिए कि $y = 2.343434 \dots$ (1)

हम देखते हैं कि दक्षिण पक्ष में दशमलव बिंदु के बाएँ दो अंकों के समूह की पुनरावृत्ति हो रही है । अतः दोनों पक्षों को केवल 10 से गुणा करने से कुछ अधिक सहायता नहीं मिलेगी । (क्यों ?)

हम (1) के दोनों पक्षों को 10^2 (अर्थात् 100) में गुणा करते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं :

$$100y = 234.343434 \dots \quad (2)$$

(2) में से (1) को घटाने पर,

$$99y = 232$$

जिससे, $y = \frac{232}{99}$

इस प्रकार, $\frac{232}{99}$ वह वांछित परिमेय संख्या है जिसका दशमलव निरूपण 2.34 है।

उदाहरण 3 : वह परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए जिसका दशमलव निरूपण 5.04 है।

हल मान लीजिए कि $y = 5.04444 \dots \quad (1)$

हम पहले (1) के दोनों पक्षों को 10 से गुणा करते हैं ताकि दशमलव बिंदु के दाईं ओर केवल पुनरावृत्ति वाला अंक ही रहे। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$10y = 50.4444 \dots \quad (2)$$

हम पुनः (2) के दोनों पक्षों को 10 से गुणा करते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं :

$$100y = 504.4444 \dots \quad (3)$$

(3) में से (2) को घटाने पर,

$$90y = 454$$

जिससे, $y = \frac{454}{90} = \frac{227}{45}$

इस प्रकार, $\frac{227}{45}$ वह वांछित परिमेय संख्या है जिसका दशमलव निरूपण 5.04 है।

प्रश्नावली 7.3

1. निम्न दशमलवों को निम्नतम पदों की परिमेय संख्याओं में बदलिए :

(i) 2.78

(ii) 0.1325

(iii) 27.0892

(iv) 10.1010

(v) 0.000025

(vi) 92.091

(vii) 5003.5003

2. निम्नतम पदों की वे परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनके दशमलव निरूपण निम्न हैं :

(i) $8\bar{3}$

(ii) $12.\bar{6}$

(iii) $0.0\bar{1}$

(iv) $5\bar{6}5$

(v) $3.2\bar{7}$

(vi) $29\bar{8}7$

(vii) $0.052\bar{5}$

(viii) $0.002\bar{7}$

(ix) $2.010\bar{1}$

मुख्य संकल्पनाएँ

एक घर में प्रथम घात समीकरण
समीकरणों को हल करने के नियम
पद का स्थानावर्तन करना

सात दशमलव की परिमेय संख्या
में बदलना
दिए हुए असात आवर्ती दशमलव
निरूपण वाली परिमेय संख्या
ज्ञात करना

असमिकाएँ और एक चर में प्रथम घात असमीकरण

इस एकक में हम असमिकाओं और उनके गुणों का अध्ययन करेंगे। हम सीखेंगे कि एक चर में, परिमेय गुणांकों वाली, प्रथम घात असमीकरणों को किस प्रकार हल किया जाता है। असमीकरण की तुलना एक झुकी हुई तुला से की गई है, जिसका असमीकरणों को हल करने के लिए नियम ज्ञात करने में अभिव्यक्ति के रूप में प्रयोग किया गया है।

8.1 असमिकाएँ क्या हैं?

हम अनुच्छेद 3.5 में पढ़ चुके हैं कि परिमेय संख्याओं की तुलना किस प्रकार की जाती है। उदाहरणार्थ, दो परिमेय संख्याओं r और s पर विचार कीजिए। तब, या तो

(i) r, s के बराबर है, (हम इसे $r = s$ लिखते हैं), या

(ii) r, s से बड़ा है, (हम इसे $r > s$ लिखते हैं), या

(iii) r, s से छोटा है, (हम इसे $r < s$ लिखते हैं)।

केवल उपर्युक्त तीन सम्भावनाएँ ही हो सकती हैं।

ऐसा कथन कि एक राशि दूसरी राशि से छोटी है अथवा बड़ी है एक असमिका (inequality) कहलाता है। r, s से बड़ा है (जिसे $r > s$ लिखा जाता

है), r_1 में छोटी है (चित्र r_1 लिखा जाता है) असमिकाओं के कथन है। इनके कुछ महत्वपूर्ण उदाहरण निम्न हैं:

$$\frac{2}{3} < 5, \quad 4 < \frac{21}{4}, \quad -12 < -\frac{33}{2}, \text{ इत्यादि।}$$

अब हम असमिकाओं के कुछ महत्वपूर्ण गुणों का अध्ययन करते हैं।

8.2 असमिकाओं के गुण

हम पहले देखते हैं कि असमिका $a < b$ असमिका $b < a$ के समान है। इसलिए हम संकेत 'से छोटा है' से संबंधित असमिकाओं के गुणों का ही उल्लेख करेंगे। आगे आने वाली चर्चा में $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ और $\frac{c}{f}$ परिमेय संख्याओं को व्यक्त करेंगे।

गुण I : असमिका के दोनों पक्षों में एक ही परिमेय संख्या जोड़ने (या घटाने) से उसकी दिशा* (direction) में कोई परिवर्तन नहीं होता।

उदाहरणार्थ, निम्न असमिका पर विचार कीजिए

$$\frac{23}{12} < \frac{35}{8} \quad (1)$$

आइए, असमिका के दोनों पक्षों में एक परिमेय संख्या, उदाहरणार्थ, $\frac{1}{4}$ जोड़ें। हमें निम्न प्राप्त होता है

$$\text{वाम पक्ष} = \frac{23}{12} + \frac{1}{4} = \frac{26}{12}$$

$$\text{दक्षिण पक्ष} = \frac{35}{8} + \frac{1}{4} = \frac{37}{8}$$

*किसी असमिका की दिशा से हमारा तात्पर्य असमिका संकेत की ओर की दिशा से है।

हम देखते हैं कि $\frac{26}{12} - \frac{37}{8}$ है। (क्यों ?) दो हुई असमिका की दिशा में कोई परिवर्तन नहीं हुआ है।

आइए, पुनः (1) को से और उसके दोनों पक्षों में से एक परिमेय संख्या, उदाहरणार्थ, 3 घटाएँ। हमें निम्न प्राप्त होता है

$$\text{वाम पक्ष} = \frac{23}{12} - 3 = \frac{13}{12}$$

$$\text{दक्षिण पक्ष} = \frac{35}{8} - 3 = \frac{11}{8}$$

हम देखते हैं कि $-\frac{13}{12} < \frac{11}{8}$ है। पुनः दो हुई असमिका की दिशा में कोई परिवर्तन नहीं हुआ है।

चिन्हों और संकेतों का प्रयोग करते हुए हम गुण 1 को निम्न प्रकार लिखते हैं :

$$\text{यदि } \frac{a}{b} < \frac{c}{d}, \text{ तो } \frac{a}{b} + \frac{e}{f} < \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$$

अब हम एक अन्य गुण का अध्ययन करते हैं।

गुण II : किसी असमिका के दोनों पक्षों को एक ही अनात्मक परिमेय संख्या से गुणा (या भाग) करने पर उसकी दिशा में कोई परिवर्तन नहीं होता।

उदाहरणार्थ, निम्न असमिका पर विचार कीजिए :

$$-\frac{3}{2} < -\frac{1}{3} \quad (2)$$

सम देयता है कि $\frac{1}{4} < \frac{27}{70}$ है। गुण की हुई असमिका की दिशा उलट गई है।

बिन्दुओं और संकेतों का प्रयोग करते हुए हम गुण III को निम्न प्रकार से लिखते हैं:

यदि $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ और यदि $\frac{c}{d}$ एक घनात्मक परिमेय संख्या है, तो

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ और } \frac{c}{d} \text{ एक घनात्मक परिमेय संख्या है, तो}$$

अतः हम असमिकाओं के एक ओर गुण का अध्ययन करते हैं।

गुण IV: यदि $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ तथा $\frac{c}{d} < \frac{e}{f}$, तो $\frac{a}{b} < \frac{e}{f}$ ।

उदाहरणार्थ, असमिकाओं $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ और $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$ पर विचार कीजिए।

तब गुण IV हमें बताता है कि

$$\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$$

जोकि वास्तव में सत्य है, क्योंकि $(1 \times 4) < (2 \times 3)$ ।

उपर्युक्त गुण, $<$ का संक्रामिता गुण (transitivity property) कहलाता है। परन्तु यह नाम उनना महत्वपूर्ण नहीं है। जो महत्वपूर्ण है वह यह याद रखना कि यदि एक संख्या एक अन्य संख्या से छोटी है और यह दूसरी संख्या किसी तीसरी संख्या से छोटी है, तो पहली संख्या तीसरी संख्या से छोटी होती है।

[पाठक को चाहिए कि वह $<$ के लिए गुण IV को लिखे।]

हम नीचे एक परिणाम, जिससे आप पहले से ही परिचित हैं, सिद्ध कर रहे हैं। परिणाम है कि दो घनात्मक परिमेय संख्याओं का योग भी घनात्मक होता है। हमें किस प्रकार प्रारम्भ करना चाहिए? आइए परिमेय संख्याओं को, उदाहरणार्थ,

r और s से व्यक्त करें। हमें दिया हुआ है कि $r > 0$ और $s > 0$ है तथा हम यह सिद्ध करना चाहते हैं कि $r + s > 0$ ।

हम निम्न असमिका से प्रारम्भ करते हैं :

$$r > 0 \quad (4)$$

हम इसके दोनों पक्षों में s जोड़ते हैं। गुण I हमें यह बताना है कि यदि हम ऐसा करेंगे तो असमिका की दिशा में कोई परिवर्तन नहीं होगा।

अर्थात्, $r + s > 0 + s$

अथवा, $r + s > s \quad (5)$

परन्तु हमें यह भी दिया है कि

$$s > 0 \quad (6)$$

(5) और (6) मिलकर यह बताते हैं कि

$$r + s > s \text{ तथा } s > 0$$

अतः, $r + s > 0$ के संक्रामिता गुण से,

$$r + s > 0$$

इससे परिणाम सिद्ध हो जाता है।

प्रश्नावली 8.1

1. इस तथ्य की सत्यता की जाँच के लिए दो उदाहरण दीजिए कि यदि

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \text{ और } \frac{e}{f} > \frac{g}{h} \text{ परिमेय संख्याएँ हैं तथा } \frac{a}{b} > \frac{c}{d}, \text{ तो}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{e}{f} > \frac{c}{d} + \frac{g}{h}$$

उपर्युक्त गुण को बम्बों में व्यक्त कीजिए।

2. बिना परिकलित किए बताइए कि निम्न में से कौन-कौन सत्य हैं तथा कौन-

कोन असत्य। सकारण उत्तर दीजिए।

(i) क्योंकि $\frac{7}{3} < \frac{13}{4}$, अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$\frac{7}{3} + \frac{125}{128} < \frac{13}{4} + \frac{125}{128}।$$

(ii) क्योंकि $\frac{16}{5} < \frac{94}{21}$, अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$\frac{16}{5} + \frac{54}{5} < \frac{94}{21} + \frac{54}{5}।$$

(iii) क्योंकि $29.382 < 29.381$, अतः यह निष्कर्ष

$$\text{निकलता है कि } 29.382 + \frac{21}{40} < 29.381 + \frac{21}{40}।$$

(iv) क्योंकि $-3 < \frac{11}{2}$, अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$-3 < \frac{25}{7} + \frac{11}{2} < \frac{26}{7}।$$

3. इस तथ्य की सत्यता की जाँच के लिए दो उदाहरण दीजिए कि यदि $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ और $\frac{e}{f}$ ऐसी परिमेय संख्याएँ हैं कि $\frac{e}{f} > 0$ तथा यदि $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ तो,

$$\frac{a}{b} \left(\frac{e}{f} \right) < \frac{c}{d} \left(\frac{e}{f} \right)$$

उपर्युक्त गुण को शब्दों में व्यक्त कीजिए।

4. इस तथ्य की सत्यता की जाँच के लिए दो उदाहरण दीजिए कि यदि

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ और } \frac{e}{f} \text{ ऐसी परिमेय संख्याएँ हैं कि } \frac{e}{f} > 0 \text{ तथा यदि } \frac{a}{b} < \frac{c}{d},$$

$$\text{तो } \frac{a}{b} \left(-\frac{e}{f} \right) > \frac{c}{d} \left(-\frac{e}{f} \right)।$$

उपर्युक्त गुण को शब्दों में व्यक्त कीजिए।

5. बनाएँ परिमलित रूप बनाइए कि निम्न में से कौन-कौन सत्य है तथा कौन-कौन असत्य है। सकारण उत्तर दीजिए।

(i) क्योंकि $\frac{13}{7} > \frac{9}{4}$, अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$\frac{13}{7} \left(\frac{251}{694} \right) > \frac{9}{4} \left(\frac{251}{694} \right)$$

(ii) क्योंकि $\frac{9}{5} > -\frac{7}{6}$, अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$\frac{9}{5} \left(\frac{43}{13} \right) < \left(-\frac{7}{6} \right) \left(\frac{43}{13} \right)$$

(iii) क्योंकि $83.05 < 83.5$, अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$(83.05) \div \left(\frac{19}{6} \right) < (83.5) \div \left(\frac{19}{6} \right)$$

(iv) क्योंकि $-\frac{5}{16} < \frac{4}{5}$, अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$\frac{5}{16} < \frac{4}{5}$$

(v) क्योंकि $-\frac{5}{16} < -\frac{4}{5}$, अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$\frac{5}{16} < \frac{4}{5}$$

6. क्या यह सत्य है कि

$$\frac{1}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} ?$$

सकारण उत्तर दीजिए।

8.3 असमीकरण

शशि अपनी कक्षा के एक गणित के टेस्ट में बैठती है। प्रश्न-पत्र में कुल 20 अंकों के 5 प्रश्न हैं। हम उसके द्वारा प्राप्त किए हुए अंकों के बारे में क्या कह सकते हैं ? [यह ज्ञात है कि एक केवल पूर्ण संख्याओं में दिए गए हैं तथा 20 अंक किसी ने भी प्राप्त नहीं किए हैं।]

आइए शशि द्वारा प्राप्त अंकों को, उदाहरणार्थ, x से व्यक्त करें। तब x , 0 या 1 या 2 या 3, इत्यादि के बराबर हो सकता है। परन्तु x , 20 के बराबर नहीं हो सकता। गणितीय रूप से हम कहते हैं कि

$$x < 20$$

तथा इसे ' x , 20 से छोटा है' पढ़ते हैं।

अब मान लीजिए कि कुछ विद्यार्थी 20 अंक भी प्राप्त करते हैं। यह सम्भव है कि शशि भी इन विद्यार्थियों में से एक हो। इस स्थिति में x , 20 के बराबर भी हो सकता है। गणितीय रूप से हम कहते हैं कि

$$x \leq 20$$

और इसे ' x , 20 से छोटा अथवा उसके बराबर है' पढ़ते हैं।

हरि को लम्बी कूद (long jump) में अपने स्कूल का प्रतिनिधित्व करना है। सफल होने के लिए उसे कम से कम 3.5 मीटर अवश्य कूदना चाहिए। यदि हरि को जितनी दूरी (मीटर में) कूदनी चाहिए उसे हम, उदाहरणार्थ, y से व्यक्त करें, तो हमें निम्न स्थिति प्राप्त होती है :

$$y \geq 3.5$$

हम इसे ' y , 3.5 से बड़ा अथवा उसके बराबर है' पढ़ते हैं।

$$x < 20, x \leq 20, y \geq 3.5$$

असमीकरणों (inequations) के उदाहरण हैं। x (या y) असमीकरण का अज्ञात (unknown) अथवा चर (variable) कहलाता है। [समीकरणों की तरह असमीकरणों में भी चर को x या y या z या u , इत्यादि से व्यक्त करते हैं। इसके लिए अंग्रेजी वर्णमाला के अंतिम भाग के अक्षरों को प्राथमिकता दी जाती है।]

असमीका का वह कथन जिसमें कोई अज्ञात राशि निहित हो असमीकरण कहलाता है। यह अज्ञात राशि, असमीकरण का चर (variable) कहलाती है। यदि चर की घात 1 हो तो हम कहते हैं कि असमीकरण प्रथम घात का है।

इस पुस्तक में हम एक चर में प्रथम घात की असमीकरणों का अध्ययन करेंगे। निम्नी असमीकरणों के कुछ उदाहरण निम्न हैं :

$$2x+1<4, \quad 3-y>2+y, \quad 2.5z+7.5\geq 3.5,$$

$$\text{-- } \frac{1}{2}x+4>\frac{3}{4}x-3, \text{ इत्यादि।}$$

एक असमीकरण के भी (एक समीकरण की तरह) दो पक्ष (sides) अर्थात् बाय पक्ष (left-hand side जिसे L.H.S भी लिखते हैं) तथा दक्षिण पक्ष right-hand side जिसे R.H.S भी लिखते हैं) होते हैं।

जब किसी संख्या को किसी असमीकरण में अज्ञात के स्थान पर प्रतिस्थापित करने पर उसकी दिशा में कोई परिवर्तन नहीं होता, तो हम कहते हैं कि वह संख्या उस असमीकरण को संतुष्ट करती है। साथ ही, यह संख्या असमीकरण का एक हल कहलाती है।

उदाहरणार्थ, असमीकरण

$$2x+1<4 \quad (1)$$

पर विचार कीजिए। निश्चय ही, यदि हम इस असमीकरण में $x=0$ प्रतिस्थापित करें तो हम देखते हैं कि इससे असमीकरण की दिशा में कोई परिवर्तन नहीं होता। क्योंकि जब $x=0$, बाय पक्ष $=2(0)+1=1$ और $1<4$ है अर्थात् बाय पक्ष < दक्षिण पक्ष है। इस प्रकार, $x=0$ असमीकरण का एक हल है।

$x=1$ के बारे में आप क्या सोचते हैं? पाठक को चाहिए कि वह जाँच करे कि $x=1$ भी उपर्युक्त असमीकरण का एक हल है।

इस असमीकरण के कुछ और हल, $x = -\frac{1}{4}$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = -1$, $x = -\frac{5}{4}$, $x = -10$, इत्यादि हैं।

हम देखते हैं कि एक चर में प्रथम घात असमीकरण के एक से अधिक हल हो सकते हैं जबकि एक चर में प्रथम घात समीकरण का एक ही हल होता है।

आइए पुनः (1) को लें और देखें कि $x=2$ की स्थिति में क्या होता है। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\text{वाम पक्ष} = 2(2) + 1 = 5$$

हम देखते हैं कि अब वाम पक्ष, दक्षिण पक्ष से बड़ा है। दूसरे पक्षों में, जब $x = 2$, तो असमीकरण की दिशा उलट जाती है। हम कहते हैं कि $x=2$ असमीकरण का हल नहीं है। क्या $x = \frac{3}{2}$ एक हल है? नहीं। (क्यों?)

किसी असमीकरण के हल ज्ञात करने के लिए प्रयत्न और भूल (trial and error) की इस प्रक्रिया में अधिक समय लगता है और, जैसा कि हम देखेंगे, यह अनावश्यक भी है। हम सुगमतापूर्वक और शीघ्रता से हल ज्ञात करने के लिए बीजगणित के ज्ञान का उपयोग कर सकते हैं। असमीकरण के हल ज्ञात करने की विधि उस असमीकरण को हल करना कहलाती है। हम इस विधि का अगले अनुच्छेद में अध्ययन करेंगे।

8.4 असमीकरण का हल करना

असमीकरण की एक मुकी हुई तुला से तुलना की जा सकती है। इसके दोनों पक्ष, दोनों पलड़े हैं। असमिका संकेत (inequality symbol) तुला की भुजा के

सुकाव की दिशा बताता है। (देखिए आकृति 8.1)



वाम पक्ष

दक्षिण पक्ष

आकृति 8.1

आइए एक तुला, जिसकी भुजा बाईं ओर को झुकी है (देखिए आकृति 8.1), के कार्य को देखें। यदि हम इसके दोनों पलकों में एक ही भार जोड़ें या उनमें से एक ही भार घटाएँ, तो सुकाव की दिशा में कोई परिवर्तन नहीं होता। पुनः यदि हम प्रत्येक पलक की वस्तुओं के स्थान पर उनका एक ही भाग या भिन्न रखें (अर्थात् एक ही घनात्मक परिमेय संख्या से गुणा या भाग करें), तो सुकाव की दिशा में कोई परिवर्तन नहीं होता।

टोक गयी हम असमीकरणों को हल करने में करेंगे। दूसरे शब्दों में, किसी असमीकरण को हल करने के लिए हम

1. असमीकरण के दोनों पक्षों में एक ही परिमेय संख्या जोड़ सकते हैं,
2. असमीकरण के दोनों पक्षों में से एक ही परिमेय संख्या घटा सकते हैं,
3. असमीकरण के दोनों पक्षों को एक ही घनात्मक परिमेय संख्या से गुणा कर सकते हैं,
4. असमीकरण के दोनों पक्षों को एक ही घनात्मक परिमेय संख्या से भाग दे सकते हैं।

अब हम इन नियमों का उपयोग करेंगे और कुछ असमीकरण हल करेंगे।
उदाहरण 1. : $2x + 1 < 4$ को हल कीजिए।

हल : हम असमीकरण के दोनों पक्षों में से 1 घटाते हैं (नियम 2)। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$2x + 1 - 1 < 4 - 1$$

अर्थात्,

$$2x < 3$$

(i)

अब हम (i) के दोनों पक्षों को 2 से भाग देते हैं (नियम 4)। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$x < \frac{3}{2}$$

इस प्रकार x का कोई भी मान, जो $\frac{3}{2}$ से छोटा है, दी हुई असमीकरण का एक हल है। x के ऐसे अनेक मान हैं। क्या आप ऐसे दो मान बता सकते हैं ?

उदाहरण 2 : $2.5z + 7.5 > 3.5$ को हल कीजिए।

हल : हम 7.5 को दक्षिण पक्ष में ले आते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं

$$2.5z > 3.5 - 7.5$$

अर्थात्,

$$2.5z > -4.0$$

(ii)

अब हम (ii) के दोनों पक्षों को 2.5 से भाग देते हैं तथा निम्न प्राप्त करते हैं :

$$z > -\frac{4.0}{2.5}$$

अर्थात्,

$$z > -1.6$$

इस प्रकार, 16 से बड़ा या उसके बराबर x का कोई भी मान दी हुई असमीकरण का एक हल है। x के ऐसे अनेक मान हैं। तथा आप इसे दो मान बना सकते हैं 7 में दो मान भी बताएँ जो दी हुई असमीकरण के हल नहीं हैं।

उदाहरण 3 : $\frac{1}{2}x + 4 \leq \frac{3}{4}x - 3$ को हल कीजिए।

हल : हम $\frac{3}{4}x$ को वाम पक्ष में तथा 4 को दक्षिण पक्ष में ले जाते हैं। हमें निम्न प्राप्त होता है

$$\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}x \leq -3 - 4$$

अर्थात्, $\frac{1}{4}x \leq -7$ (iii)

अब हम (iii) के दोनों पक्षों को 4 से गुणा करते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं

$$-x \leq -28 \quad (iv)$$

परन्तु हम इसे x के लिए हल करना चाहते हैं। दूसरे शब्दों में, हम x के $(-x)$ के नहीं) के मान ज्ञात करना चाहते हैं जो दी हुई असमीकरण को सन्तुष्ट करते हैं। इसलिए, (iv) में हम $-x$ को दक्षिण पक्ष में तथा -28 को वाम पक्ष में ले जाते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं

$$28 \leq x,$$

जो कि निम्न के समान है

$$x \geq 28$$

इस प्रकार, 28 से बड़ा या उसके बराबर x का कोई भी मान दी हुई असमीकरण का एक हल है। गुण x के ऐसे अनेक मान हैं।

[क्या आपको असमिकाओं के गुण III कि 'असमिका के दोनों पक्षों को एक ही ऋणात्मक परिमेय संख्या से गुणा (या भाग) करने से उसकी दिशा उलट जाती है' के बारे में याद है? जब हमें असमीकरण (iii) प्राप्त हो जाए तब हम असमिकाओं के उपर्युक्त गुण का प्रयोग कर सकते हैं और हल ज्ञात करने में एक पग तथा सभवतः कुछ समय की बचत कर सकते हैं। आइए देखें कैसे?

हम (iii) के दोनों पक्षों को -4 से यह ध्यान में रखते हुए गुणा करते हैं कि उनकी दिशा अवश्य उलट जानी चाहिए। हमें निम्न प्राप्त होता है।

$$4\left(-\frac{1}{4}\right)x \geq (-4)(-7)$$

अर्थात्, $x \geq 28$

उदाहरण 4 : हल कीजिए

$$2x + \frac{1}{2} - 5y + \frac{1}{2}(y - 4)$$

हल : पहले हम दक्षिण पक्ष के कोष्ठक हटा कर सरल करते हैं। हमें निम्न प्राप्त होता है।

$$2x + \frac{1}{2} - 5y + \frac{1}{2}y - 2$$

अर्थात्, $2x + \frac{1}{2} - \frac{11}{2}y - 2$ (i)

(i) में $\frac{11}{2}y$ को बायें पक्ष तथा $\frac{1}{2}$ को दक्षिण पक्ष में ले जाने पर,

$$2x - \frac{11}{2}y = -2 - \frac{1}{2}$$

अर्थात्, $-\frac{7}{2}y = -\frac{5}{2}$ (ii)

अब (ii) के दोनों पक्षों को $-\frac{2}{7}$ से गुणा करने पर [याद रखिए कि समीकरण की दिशा उलट जाएगी], हमें निम्न प्राप्त होता है।

$$y = \left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{2}{7}\right)$$

अर्थात्, $y = \frac{5}{7}$

इस प्रकार, $\frac{5}{7}$ से छोटा y का कोई भी मान दी हुई असमीकरण का एक हल है। y के ऐसे अनेक मान हैं। क्या आप ऐसे दो मान बता सकते हैं? ऐसे दो मान भी बताइए जो दी हुई असमीकरण के हल नहीं हैं।

उदाहरण 5 : ऐसी असमीकरण बनाइए कि संख्याओं $\frac{1}{4}$, -3 और $\frac{5}{4}$ में से प्रत्येक उस असमीकरण का एक हल हो।

हल : आइए पहले संख्याओं को आरोही (या अवरोही) क्रम में व्यवस्थित करें। आरोही क्रम में ये निम्न प्रकार हैं

$$-3, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}$$

निश्चय ही, $y < \frac{5}{4}$ ऐसा असमीकरण है जिसका तीनों दी हुई संख्याओं में से प्रत्येक एक हल है।

क्या आप ऐसी कुछ अन्य असमीकरणों के बारे में सोच सकते हैं? $y < 2$ या

$y < 2$ या $y < \frac{25}{3}$ के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

$y > -3$, $y > -4$, $y > -4$ और $y > -\frac{9}{2}$ के बारे में आप क्या सोचते हैं?

हम देखते हैं कि हम ऐसे अनेक असमीकरण बना सकते हैं जिनका संख्याओं $\frac{1}{4}$, -3 और $\frac{5}{4}$ में से प्रत्येक एक हल है।

प्रश्नावली 8.2

- 1 (क) क्या $\frac{5}{3}$ असमीकरण $\frac{3}{4}x - \frac{4}{3} \geq 0$ का एक हल है ?
 (ख) क्या $\frac{7}{6}$ असमीकरण $\frac{7}{9}(x-2) \leq \frac{2}{3}$ का एक हल है ?
- 2 निम्न में से कौन से कथन सत्य हैं ?
 (क) $\frac{10}{3}$ असमीकरण $2x + 3 \leq 10$ का एक हल है ।
 (ख) 3 असमीकरण $9x + 3 \geq 27$ का एक हल है ।
 (ग) $\frac{25}{4}$ असमीकरण $20 - 4x - 7$ का एक हल है ।
- 3 एक ऐसा असमीकरण बनाइए जिसका तीन संख्याओं—1, $\frac{3}{2}$ और 2 में से प्रत्येक एक हल हो ।
- 4 असमीकरण $\frac{7}{3}x - 1 \leq 17 - \frac{2}{3}x$ के पूर्ण संख्याओं में हल ज्ञात कीजिए ।
- 5 निम्न असमीकरणों में से प्रत्येक को हल कीजिए .
 (i) $7x - 14 \leq 0$ (ii) $2y + 7 \leq 15$
 (iii) $2 - 3y \leq 2x + 12$ (iv) $3x + \frac{1}{2} \geq \frac{x}{4} + 5$
 (v) $x + 6 \leq 4 - 3y$ (vi) $2x - 3 \leq 5x + 7$
 (vii) $4.5z - \frac{1}{2} \leq 3.5z + \frac{1}{2}$ (viii) $\frac{5}{2} - \frac{4}{3}x \leq -\frac{7}{2} - \frac{10}{3}x$

6 क्या $z = 5.1$ असमीकरण $-2.5z + 6.8 \leq -18.7 - 3z$ का एक हल है?

7 निम्न असमीकरणों में से प्रत्येक को हल कीजिए

$$(i) \frac{2y-3}{3} - \frac{y-3}{2} \leq \frac{6}{5} \quad (ii) \frac{1}{2}(x+5) \cdot 3 + \frac{1}{4}(x+1)$$

$$(iii) \frac{y-2}{4} - \frac{y-4}{6} \geq \frac{2}{3} \quad (iv) \frac{x+4}{4} - \frac{3x-9}{7} \leq \frac{1}{2}$$

$$(v) \frac{y}{2} - \frac{y}{3} + \frac{1-y}{6} \leq 0 \quad (vi) \frac{4y+1}{3} + \frac{2(y+1)}{3} - y \leq 6$$

$$(vii) \frac{1}{3} \left[3x - (4 - 3x) \right] + \frac{1}{3} (8 - 9x) \cdot 3 \leq 2x$$

*8. वे पूर्णांक लिखिए जो दोनों असमीकरणों $1-x \leq \frac{3}{2}$ तथा $2x \leq 8$ के हल हैं।

मुख्य संकल्पनाएँ

असमिकाएँ और उनके गुण
असमिका की दिशा
असमीकरण

असमीकरण का हल
असमीकरण हल करने के लिए नियम

विविध प्रश्नावली II

(एकक V, VI, VII और VIII पर)

1. निम्न में से प्रत्येक परिमेय संख्या का दशमलव निरूपण लिखिए। बताइए कि निरूपण सांत दशमलव है या असांत आवर्ती दशमलव।

$$(i) \frac{3}{16}$$

$$(ii) -\frac{18}{125}$$

$$(iii) -\frac{15}{7}$$

$$(iv) \frac{141}{320}$$

$$(v) \frac{5}{12}$$

$$(vi) -\frac{9}{64}$$

2. दिखाइए कि निम्न में से प्रत्येक परिमेय संख्या का दशमलव निरूपण सांत है।

$$(i) \frac{26}{25}$$

$$(ii) -\frac{95}{128}$$

$$(iii) -\frac{128}{125}$$

$$(iv) \frac{15}{16}$$

$$(v) \frac{87}{125}$$

3. दिखाइए कि निम्न में से प्रत्येक परिमेय संख्या का दशमलव निरूपण असांत आवर्ती है।

$$(i) \frac{5}{27}$$

$$(ii) -\frac{16}{45}$$

$$(iii) \frac{37}{24}$$

$$(iv) -\frac{4}{3}$$

- *4. निम्न में से प्रत्येक का दशमलव निरूपण ज्ञात कीजिए। अनुच्छेद 5.2 की विधि का प्रयोग कीजिए। (लम्बी विभाजन विधि का प्रयोग नहीं कीजिए।)

(i) $\frac{3}{25}$ (ii) $\frac{11}{16}$ (iii) $\frac{7}{40}$

- *5. निम्न में से प्रत्येक का दशमलव के 5 स्थानों तक दशमलव निरूपण ज्ञात कीजिए। अनुच्छेद 5.2 की विधि का प्रयोग कीजिए। (लम्बी विभाजन विधि का प्रयोग नहीं कीजिए।)

(i) $\frac{3}{104}$ (ii) $\frac{435}{5128}$ (iii) $\frac{951}{900}$

6. निम्न में से कौन-कौन से बीजीय व्यंजक बहुपद हैं ?

(i) $\frac{4}{3} - 5x$ (ii) $3x^2 - \frac{7}{4}x^4 - 8$

(iii) $\frac{7}{4}y - 4y^4 - 1$ (iv) $\frac{1}{y^2} - \frac{1}{5y} - 3$
 $\frac{3y + \frac{5}{2} - 2y^2}{3y + \frac{5}{2} - 2y^2}$

(v) $\frac{3}{8}x - \frac{5}{3}x^2 + 11x^4 - x^2 + 21$ (vi) $29x^3$

7. निम्न एकपदियों में से प्रत्येक की घात लिखिए :

(i) $-\frac{17}{2}$ (ii) $\frac{15}{8}x^3$

(iii) $\frac{12}{19}y^{100}$ (iv) $\frac{13}{18}z$

(v) $9y^{10}$ (vi) $23z^6$

8. एक घर में दो ऐसे बीजीय व्यंजकों के उदाहरण दीजिए जो बहुपद नहीं हैं।

9. निम्न एकपदियों की उनकी घातों के आरोही क्रम में लिखिए :

$$23x^4, \frac{7}{2}x^3, \frac{9}{7}x^5, -26, 0.8x^6$$

10. निम्न एकपदियों की उनकी घातों के अवरोही क्रम में लिखिए :

$$\frac{12}{11}y^7, -\frac{16}{13}y^6, -5y^{15}, 32, \frac{43}{21}y^9$$

11. निम्न बहुपदों में से प्रत्येक की घात ज्ञात कीजिए। प्रत्येक बहुपद को दुबारा इस प्रकार लिखिए कि उसके पद अपनी घातों के अवरोही क्रम में आएँ।

$$(i) 3y^2 - \frac{5}{8}y^3 + 5$$

$$(ii) \frac{13}{2} - 6y^4 + y^2 - \frac{2}{7}y^5$$

$$(iii) 38x^5 - 2.5x^3 - 23x^2$$

$$(iv) 16 - 25x^2 + \frac{16}{9}x^3 - \frac{5}{18}x^5 + \frac{3}{5}x^4$$

12. निम्न में से प्रत्येक में योग ज्ञात कीजिए :

$$(i) 7y, -2y^4, \frac{7}{2}y, -2y^3, 8, \frac{1}{2}y^4$$

$$(ii) \frac{5}{9}x^5 - \frac{3}{5}x^4 + 5x^2 - 3, \frac{13}{9}x^3 + \frac{3}{5}x^4 - 5x^2 + 3$$

$$(iii) \frac{29}{3}x^7 + \frac{25}{16}x^4 - \frac{3}{8}x + 5, \frac{3}{8}x - \frac{25}{16}x^4 + 5 - \frac{29}{3}x^7$$

$$(iv) \frac{21}{4}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 5, \frac{25}{4}x^3 + \frac{7}{8}x^2 - 13x + 9$$

$$(v) \frac{34}{13}x^4 - \frac{25}{16}x^2 - \frac{5}{3}, \quad \frac{5}{13}x^4 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{3}{2} + 2x$$

$$(vi) 7 + \frac{2}{17}x^2 - \frac{4}{15}x^3, \quad \frac{7}{15}x^3 - \frac{2}{17}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + 2$$

13. घटाइए :

$$(i) \frac{9}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \text{ में से } 7x - \frac{5}{2}x^3 + 3x^2 - \frac{2}{3}$$

$$(ii) \frac{8}{3}x^3 - 5 + \frac{7}{9}x^4 + x^2 \text{ में से } \frac{2}{9}x^4 - \frac{5}{3}x^2 + 6$$

$$(iii) \frac{8}{13}x^3 - 3x + \frac{6}{11}x^2 + 2 \text{ में से } -\frac{5}{11}x^2 - \frac{2}{13}x^3 - x$$

$$(iv) \frac{14}{5}x^5 - \frac{11}{18}x^3 + \frac{1}{2}x^4 - 5 \text{ में से } \frac{7}{18}x^3 + \frac{7}{5}x^5 - x^4 + 2$$

$$(v) \frac{6}{5}x^4 - \frac{13}{8}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3 \text{ में से } \frac{5}{8}x^3 - \frac{2}{5}x^4 + 2x$$

14. जोड़िए :

$$(i) \frac{13}{11}x^3 - \frac{12}{7}x^2 - 3, \quad \frac{5}{7}x^3 - \frac{1}{11}x^3 - \frac{12}{5} + \frac{10}{3}x \text{ और } \frac{5}{11}x^3 + \frac{2}{5} - \frac{1}{3}x$$

$$(ii) 5x - \frac{7}{3}x^2 + \frac{2}{9}x^3, \quad \frac{7}{2}x + \frac{5}{9}x^2 + x^4, \quad -\frac{1}{2}x + \frac{10}{3}x^3, \\ -\frac{7}{9}x^3 + 5x^4 \text{ और } 6x^2 - \frac{1}{9}x^3 + 2x^4$$

$$(iii) \frac{5}{19}x^5 - \frac{6}{13}x^3 + \frac{2}{3}x, \quad \frac{1}{19}x^3 - \frac{8}{3}x + 5, \quad \frac{15}{13}x^3 + \frac{19}{3}x + \frac{1}{2}$$

$$\text{और } -\frac{5}{19}x^5 + \frac{2}{13}x^3 + \frac{3}{2}$$

$$(iv) \frac{13}{5}x^4 + \frac{8}{9}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 3, \quad \frac{19}{5}x^4 - \frac{11}{9}x^3 + \frac{5}{2} - 3x \text{ और}$$

$$-\frac{27}{5}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{17}{4}x^2 + 5x$$

$$(v) \frac{15}{8}x^4 - \frac{13}{6}x^4 - 6x^3 + 7, \quad \frac{5}{6}x^4 + \frac{6}{7}x^3 - 2x,$$

$$-\frac{7}{8}x^3, \quad \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{7}x^3 + 4 \text{ और } 3x^3 - 5x + \frac{3}{2}$$

15 समान पद एकत्रित कीजिए और जोड़िए :

$$(i) \left(8 - \frac{3}{2}x^3 + 5x^4\right) + \left(\frac{7}{2}x^3 - \frac{5}{11}x^4 + \frac{8}{19}x\right)$$

$$+ \left(7 - \frac{16}{11}x^4 + \frac{9}{2}x^3\right) - \left(2x^3 - \frac{6}{19}x - 2\right)$$

$$(ii) \left(\frac{3}{17}x^4 - \frac{8}{5}x^3 - x^4 + 1\right) - \left(\frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{2}x^4 - 3\right)$$

$$- \left(\frac{19}{5}x^3 + \frac{12}{17}x^3 - x^4\right) + \left(5x^3 - 4 + \frac{2}{9}x\right)$$

$$(iii) \left(\frac{7}{6}x^4 - \frac{2}{11}x^3 - \frac{5}{4}x + 1\right) - \left(\frac{3}{4}x + 2 - \frac{17}{6}x^4\right)$$

$$- \left(\frac{5}{11}x^3 + \frac{7}{4}x + 3\right) - \left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{11}x^3 - \frac{5}{2}\right)$$

$$(iv) \left(\frac{5}{8}x^5 - 3x^4 + \frac{11}{3}x^3 + \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{8}x^5 - \frac{7}{2}x^4 + \frac{11}{3}x^3 \right) \\ - \left(\frac{13}{2}x^5 - \frac{13}{2}x^4 + \frac{9}{5} \right) - \left(\frac{4}{3}x^3 + x^2 - 2 \right)$$

16 $\left(5x^3 - \frac{2}{7}x^4 - 3x^2 + 5 \right)$ और $\left(7x^3 - \frac{8}{7}x^4 + \frac{3}{2}x^2 \right)$ के योग में से $\left(11 - \frac{8}{11}x^3 + \frac{3}{7}x^4 \right)$ और $\left(2 + \frac{8}{7}x^4 + \frac{8}{11}x^3 - x^2 \right)$ का योग घटाइए।

17 $\frac{8}{5}x - 3x^3 + 4$, $\frac{4}{7}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{13}{5}x$ और $13 - \frac{7}{5}x + \frac{3}{7}x^4$ के योग में से $\frac{18}{7}x^4 - \frac{21}{5}x - 9$ और $\frac{11}{2}x^3 + \frac{1}{5}x - 3$ का योग घटाइए।

18 P बहुपद $\frac{5}{11}x^5 - \frac{3}{13}x^3 + 2x - 3$ को, Q बहुपद $\frac{7}{13}x^3 - \frac{8}{9}x^2 - 5x - \frac{3}{2}$ को, R बहुपद $\frac{15}{11}x^5 + \frac{2}{9}x^2 + \frac{3}{2}x$ को तथा S बहुपद $\frac{9}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{11}x^5 + \frac{1}{13}x^3$ को व्यक्त करता है। परिकल्पित कीजिए :

(i) $3P$

(ii) $P - Q + R - S$

19 $\frac{15}{13}x^4 - x^2 + \frac{3}{2}x^3 + 2$ प्राप्त करने के लिए
 $3x^5 - \frac{12}{13}x^4 - \frac{8}{5}x + 3$ में क्या जोड़ना चाहिए ?

20 $\frac{3}{5}x^3 - \frac{7}{8}x^2 + 1 - \frac{2}{19}x^4 + x^5$ प्राप्त करने के लिए
 $\frac{6}{19}x^4 - \frac{13}{5}x^3 + \frac{5}{8}$ में से क्या घटाना चाहिए ?

21. निम्न बहुपदों में से प्रत्येक का उसके सम्मुख दिए चर के मानों पर मान ज्ञात कीजिए .

(i) $4x^3 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$ का $x=0, 2, -2$ पर

(ii) $\frac{1}{9}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + x + 8$ का $x=3, -3$ पर

(iii) $\frac{x^4}{5} - \frac{2}{5}x^3 + \frac{18}{5}x^2 - 3$ का $x=1, 5, -5$ पर

*(iv) $\frac{3}{2}x^5 - \left[5x^3 - \frac{7}{4}x^4 - 2x \left(3 - \frac{1}{2}x^2 \right) \right]$ का $x=1$ पर

22 बहुपद $\frac{1}{4}(x^4 + 2x^3 + x^2)$ का $x=5$ पर मान ज्ञात कीजिए और जाँच कीजिए कि आपका उत्तर प्रथम पाँच घनपूर्णाकों के घनों के योग के बराबर है।

23. निम्न बहुपदों में से प्रत्येक का शून्य ज्ञात कीजिए

$$(i) \frac{1}{8}x + 8$$

$$(ii) \frac{11}{8} - \frac{3}{2}x$$

$$(iii) \frac{5}{7}x + 8$$

$$(iv) 3.5x + 7$$

$$(v) 2x - \frac{1}{2}(4 - x) + 0.5x$$

$$(vi) 21 - \frac{7}{5} \left[2x - (5 - 8x) \right]$$

निम्न समीकरणों में से प्रत्येक को हल कीजिए। समीकरण में प्रतिस्थापित करके अपने उत्तर की जाँच कीजिए :

$$24 \quad \frac{11}{2}x + \frac{16}{3} = 5$$

$$25 \quad \frac{18}{7}x - \frac{3}{14} = \frac{33}{14}$$

$$26 \quad -\frac{19}{2x} - \frac{6}{x} = \frac{31}{5}$$

$$27 \quad -\frac{x}{3} + \frac{3}{8} = \frac{14}{3}x - \frac{37}{8} + (x - 1)$$

$$28 \quad 2x - 3 = \frac{3x - 5}{4} - 3 - \frac{5x}{6}$$

$$29. \quad \frac{2x+3}{3} - 4 = x - \frac{5-3x}{3}$$

$$30. \quad \frac{2}{3}y - \frac{2}{5} + \frac{3-2y}{3} = -\frac{11}{15}$$

$$31. \quad \frac{5z-2}{2} - 2z = 4 - \frac{2z+1}{3}$$

$$32. \quad \frac{7y+5}{3} - y = \frac{3y-5}{4} - \frac{1}{12} - \frac{1}{4}y + \frac{4}{3}y$$

$$33. \quad \frac{7x-6}{4} + 2 = \frac{5x+3}{3}$$

$$34. \quad \frac{11}{6}x - \left(\frac{5}{9} + \frac{2}{3}x \right) = \frac{10}{9}x - \frac{4}{9}$$

$$35. \quad \frac{5}{3}x - \frac{3}{5}x = 8$$

$$36. \quad \frac{x-5}{x-3} + 1 = \frac{5}{2}$$

$$37. \quad \frac{3x-8}{5x+9} = \frac{2}{3}$$

$$38. \quad \frac{8-3x}{4} - \frac{3-9x}{5} = \frac{7-4x}{2} - \frac{x}{10}$$

$$39. \quad -\frac{7}{6}x - 4 \left[4 + \left(\frac{19}{6}x - 7 \right) \right] = \frac{23}{6}x - 5$$

$$40. \quad \frac{15}{7} + \left[\frac{8}{13}x - \left(1 + \frac{15}{13}x + \frac{5}{7} - x \right) \right] = x - \left(\frac{4}{7} - \frac{19}{13}x \right)$$

$$41. \quad 1 - \frac{\frac{1}{3}}{2 + \frac{5}{3 - \frac{1}{x}}} = 4$$

42. एक दूध वाले के पास कुछ भैंसें, गायें और बकरियाँ हैं। बकरियों की संख्या गायों की संख्या की $\frac{9}{2}$ गुनी है तथा गायों की संख्या भैंसों की संख्या की $\frac{5}{2}$ गुनी है। यदि तीनों की कुल संख्या 59 है, तो दूध वाले की भैंसों, गायों और बकरियों की संख्या ज्ञात कीजिए।
43. एक त्रिभुज ABC में $\angle A = 60^\circ$ है। यदि कोणों B और C का अनुपात $5 : 7$ है, तो कोण निर्धारित कीजिए।
44. एक परिमेय संख्या का हर, उसके अंश से 3 अधिक है। यदि अंश में 7 जोड़ दिया जाय तथा हर में से 2 घटा दिया जाय, तो हमें संख्या 2 प्राप्त होती है। वह परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।
45. एक त्रिभुज ABC का परिमाण 15 सें० मी० है। यदि $AB = 5$ सें० मी० तथा BC और CA का अनुपात $2 : 3$ है, तो BC और CA ज्ञात कीजिए।
46. वीरेन्द्र 4350 रु० का कुछ भाग 5% वार्षिक पर तथा शेष भाग 6% वार्षिक पर जमा कराता है। यदि उसका वर्ष का पूरा व्याज 247 50 रु० है, तो बताइए उसने प्रत्येक दर पर कितने रुपये जमा किये थे।
47. गंगादीन अपनी भूमि का एक-चौथाई भाग अपने लिए रखता है तथा शेष को अपने दो पुत्रों में समान रूप से बाँट देता है। यदि प्रत्येक पुत्र को 2.25 हेक्टेयर भूमि मिलती है, तो बताइए कि गंगादीन अपने लिए कितनी भूमि रखता है।

48. विक्रम को स्वयं अपने, अपनी पत्नी और अपने 9 वर्षीय पुत्र के दिल्ली से कानपुर तक के रेल-टिकट के लिए 49.75 रु० देने पड़ते हैं। यदि 12 वर्ष से कम के बच्चे का आधा किराया लगता है, तो दिल्ली से कानपुर तक का एक व्यक्ति का पूरा किराया निर्धारित कीजिए।
49. शमीम की वर्तमान आयु अपने पिता की आयु की $\frac{1}{5}$ है, परन्तु दो वर्ष में उसकी आयु अपने पिता की आयु की एक-चौथाई हो जाएगी। दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।
- 50 निम्न दशमसर्वों को निम्नतम पदों की परिमेय संख्याओं में बदलिए :
- | | |
|-------------|--------------|
| (i) 5.32 | (ii) 6.25 |
| (iii) 58.67 | (iv) 0.00025 |
| (v) 20.053 | |
51. निम्नतम पदों में वे परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनके दशमलव निरूपण निम्न हैं :
- | | |
|--------------------|---------------------|
| (i) $5\bar{9}$ | (ii) $22.\bar{5}$ |
| (iii) $2.\bar{44}$ | (iv) $0.006\bar{2}$ |
| (v) $0.125\bar{3}$ | (vi) $25.0\bar{28}$ |
52. निम्न में से कौन से कथन सत्य हैं ?
- | | |
|------------------------------|--|
| (i) $2.27\bar{9} = 2.28$ | |
| (ii) $5.328 = 5.32$ | |
| (iii) $16.32\bar{9} = 16.33$ | |
| (iv) $28.64\bar{8} = 28.7$ | |

53 बिना परिकलन किए बताइए कि निम्न में में कौन से कथन सत्य हैं और कौन से असत्य ? सकारण उत्तर दीजिए ।

(i) क्योंकि $\frac{15}{4} \cdot \frac{21}{5}$, अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$\frac{15}{4} + \frac{5}{8} = \frac{21}{5} + \frac{5}{8} \quad !$$

(ii) क्योंकि $\frac{25}{16} \cdot \frac{35}{17}$, अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$\frac{25}{16} - \frac{27}{5} = \frac{35}{17} - \frac{27}{5} \quad !$$

(iii) क्योंकि $-8 = -\frac{17}{3}$, अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$(-8) \div \left(-\frac{6}{7}\right) = \left(-\frac{17}{3}\right) \div \left(-\frac{6}{7}\right) \quad !$$

(iv) क्योंकि $-3 = -5$, अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$(-3) \times \frac{28}{13} = (-5) \times \frac{28}{13} \quad !$$

(v) क्योंकि $3508 = 32$, अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$(3508) \div \left(-\frac{9}{8}\right) = 32 \div \left(-\frac{9}{8}\right) \quad !$$

(vi) क्योंकि $\frac{128}{25} \cdot \frac{40}{19}$, अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$\frac{128}{25} \div 11 = \frac{40}{19} \div 11 \quad !$$

(vii) क्योंकि $\frac{31}{12} - \frac{38}{11}$, अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$\frac{31}{12} < \frac{38}{11}$$

(viii) क्योंकि $\frac{31}{12} - \frac{38}{11}$, अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$-\frac{31}{12} > -\frac{38}{11}$$

54 निम्न में से कौन से कथन सत्य हैं ? सकारण उत्तर दीजिए ।

(i) $\frac{5}{8} - \frac{6}{5} = 3 - \frac{6}{5}$

(ii) $2 + \frac{4}{13} = -2 + \frac{4}{13}$

(iii) $\frac{9}{16} \div \frac{5}{12} = \frac{2}{7} \div \frac{5}{12}$

(iv) $-\frac{7}{22} \div (-3) = -\frac{7}{18} \div (-3)$

(v) $3.5 \times (-6) = 4.2 \times (-6)$

(vi) $\frac{112}{15} \times \left(-\frac{10}{17}\right) > \frac{100}{19} \times \left(-\frac{10}{17}\right)$

55. क्या $z = 5.1$, असमीकरण $-2.5z - 5.7 < -18.7 - 3z$ का एक हल है ?

56. क्या $x = -2$, असमीकरण $\frac{3}{4}(x-4) \leq \frac{1}{5}(7x+3)$ का एक हल है ?

57. निम्न में कौन से कथन सत्य हैं ?

(i) $x = 2$ असमीकरण $265x - 287 = 234$ का एक हल है।

(ii) $x = \frac{9}{4}$ असमीकरण $\frac{2}{3}(x+6) = \frac{8}{3}x - 5$ का एक हल है।

(iii) $y = 5$ असमीकरण $16\left(y - \frac{3}{2}\right) \leq 12y + 28$ का एक हल है।

58. ऐसी असमीकरण बनाइए कि निम्न संख्याओं के समुच्चयों में से प्रत्येक उसका एक हल हो :

(i) $\frac{15}{2}, -\frac{18}{13}, \frac{2}{9}$

(ii) $\frac{1}{4}, -\frac{3}{5}, -\frac{2}{7}, \frac{5}{3}$

(iii) $-2.5, -3.5, -4.5$

59. निम्न असमीकरणों में से प्रत्येक के पूर्ण संख्याओं में हल ज्ञात कीजिए :

(i) $4x - 24 \leq 12$

(ii) $-6x - \frac{7}{2} \geq -13$

60. निम्न असमीकरणों में से प्रत्येक को हल कीजिए :

(i) $\frac{3}{8}\left(z - \frac{11}{6}\right) > \frac{3}{8}\left(2z - \frac{5}{3}\right)$

(ii) $\frac{x+2}{3} - \frac{3x+4}{4} \leq -\frac{5}{8}x$

(iii) $\frac{2x+1}{21} + \frac{1-x}{3} \geq \frac{1}{3} + \frac{x}{7}$

$$(iv) \frac{5-y}{3} - \frac{1-y}{6} \leq \frac{7+2y}{4}$$

$$(v) \frac{8}{13}x - \left(\frac{15}{13}x + \frac{12}{7} - x \right) \leq x - \left(\frac{4}{7} - \frac{19}{13}x \right) - \frac{15}{7}$$

$$(vi) \frac{1}{1 - \frac{4}{3 + \frac{2}{1 - \frac{1}{1+x}}}} \leq 2$$

61. निम्न में से प्रत्येक प्रश्न में दो पूर्ण संख्याएँ लिखिए जो दोनों ही बसमीकरणों के हल हैं :

$$(i) \begin{aligned} 3x - 8 &\leq 0 \\ -2.5x &\leq 2.75 \end{aligned}$$

$$(ii) \begin{aligned} \frac{5}{8}y - 24 &\leq -8 \\ y &> 20 \end{aligned}$$

एकक IX

घातांक

इस एकक में हम परिमेय संख्याओं की पूर्णांकीय घातों के बारे में अध्ययन करेंगे। हम घातांक वाक्यावली को प्रविष्ट करेंगे और घातांकीय संकेतन में लिखी संख्याओं के गुणन तथा विभाजन के लिए मूलभूत नियमों का अध्ययन करेंगे।

9.1 सूचिका

पिछली कक्षाओं में हमने पूर्णांकों के वर्ग, घन और उच्चतर (घनपूर्णक) घातों के बारे में पढ़ा था। आपको याद होगा कि, उदाहरणार्थ, 3^2 को '3 की द्वितीय घात' या '3 का वर्ग' या '3 की घात 2' या '3 वर्ग' पढ़ा जाता है। साथ ही यह कि

$$3^2 = 3 \times 3$$

इसी प्रकार, $(-6)^3 = (-6) \times (-6) \times (-6)$

आपको याद होगा कि ऊपर लिखा संख्याक, घातांक (exponent या index) कहलाता है। वह संख्या जिस पर कोई घात (power) [अर्थात् घातांक] लगी हो, आधार (base) कहलाती है। इस प्रकार, 3^2 में, 3 आधार है तथा 2 घातांक है। इसी प्रकार, $(-6)^3$ में, -6 आधार है तथा 3 घातांक है।

जैसा कि पूर्णांकों की स्थिति में है, जब किसी परिमेय संख्या को स्वयं उसी से गुणा किया जाता है तब हमें जो प्राप्त होता है उसे हम उस परिमेय संख्या की द्वितीय घात या उस परिमेय संख्या का वर्ग कहते हैं।

उदाहरणार्थ, $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$ का वर्ग है और इसे $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ लिखते हैं।

हम देखते हैं कि

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

परिमेय संख्याओं की उच्चतर घातों को भी इसी प्रकार परिभाषित किया गया है।

$$\text{इस प्रकार, } \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{243}{1024}$$

$$\left(-\frac{5}{6}\right)^3 = \left(-\frac{5}{6}\right) \times \left(-\frac{5}{6}\right) \times \left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{125}{216}$$

हमारे शब्दों में, यदि b एक परिमेय संख्या है तथा m एक धनपूर्णांक हो b^m उन m गुणनखंडों के गुणनफल को व्यक्त करता है जिनमें से प्रत्येक b है। अर्थात्,

$$b^m = \underbrace{b \times b \times b \times \dots \times b}_{(m \text{ बार})}$$

हम परिभाषित करते हैं कि $b^0 = 1$, जबकि b स्वयं शून्य नहीं है। इस प्रकार, $\left(\frac{7}{2}\right)^0 = 1$, $(-31)^0 = 1$, $\left(-\frac{155}{216}\right)^0 = 1$, इत्यादि। यह स्पष्ट है कि किसी परिमेय संख्या की प्रथम घात स्वयं* वह संख्या ही होती है। इस प्रकार,

$$\left(\frac{16}{7}\right)^1 = \frac{16}{7}, \left(-\frac{8}{15}\right)^1 = -\frac{8}{15}, \text{ इत्यादि।}$$

* इसी कारण प्रायः हम घातांक 1 नहीं लिखते।

प्रश्नावली 9.1

1 निम्न संख्याओं में से प्रत्येक के आधार और घातांक लिखिए :

$$(i) \left(\frac{3}{2}\right)^4$$

$$(ii) 2^6$$

$$(iii) \left(-\frac{5}{4}\right)^3$$

$$(iv) \left(\frac{11}{8}\right)^2$$

$$(v) \left(-\frac{5}{6}\right)^{20}$$

$$(vi) \frac{7}{5}$$

$$(vii) \left(\frac{132}{143}\right)^0$$

2 निम्न में से प्रत्येक को घातांकीय संकेतन (exponential notation) में लिखिए :

$$(i) 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$(ii) \left(-\frac{8}{5}\right) \times \left(-\frac{8}{5}\right) \times \left(-\frac{8}{5}\right)$$

$$(iii) \frac{21}{11} \times \frac{21}{11} \times \frac{21}{11} \times \frac{21}{11} \times \frac{21}{11} \times \frac{21}{11}$$

$$(iv) \frac{1}{5}$$

$$(v) (2.07) \times (2.07) \times (2.07) \times (2.07)$$

$$(vi) (-5.5) \times (-5.5) \times (-5.5) \times (-5.5) \times (-5.5)$$

$$(vii) 37 \times 37 \times 37 \times 37$$

$$(viii) \frac{21}{4}$$

3. (क) $\frac{16}{81}$ को दो विभिन्न प्रकार से घातांकीय संकेतन में लिखिए ।

(ख) $\frac{1}{64}$ को दो विभिन्न प्रकार से घातांकीय संकेतन में लिखिए ।

4. निम्न का मान ज्ञात कीजिए :

$$(i) \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$(ii) \left(-\frac{7}{8}\right)^2$$

$$(iii) \left(\frac{3}{2}\right)^4$$

$$(iv) 2^6$$

$$(v) \left(-\frac{5}{4}\right)^3$$

$$(vi) \left(\frac{11}{8}\right)^2$$

$$(vii) (-3)^7$$

$$(viii) (-18)^0$$

$$(ix) \left(\frac{207}{1352}\right)^0$$

$$(x) (25)^3$$

$$(xi) (-1.3)^4$$

$$(xii) (0)^5$$

9.2 घातांकों के नियम

9.2.1 आइए अब घातांकीय संकेतन में लिखी एक ही आधार वाली संख्याओं के गुणन का अध्ययन करें । हम कुछ उदाहरण लेते हैं ।

उदाहरण 1 : $(-3)^5$ और $(-3)^3$ का गुणा कीजिए तथा गुणनफल को घातांकीय संकेतन में लिखिए ।

हल : हम $(-3)^5 \times (-3)^3$ ज्ञात करना चाहते हैं तथा परिणाम को घातांकीय

सकेतन में लिखना चाहते हैं। हम जानते हैं कि

$$(-3)^3 = (-3) \times (-3) \times (-3) = (-3) \times (-3) = 243$$

तथा, $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$

इस प्रकार, $(-3)^5 \times (-3)^2 = -243 \times 9 = -2187$

अब आइए $(-3)^7$ ज्ञात करें। हमें निम्न प्राप्त होता है

$$(-3)^7 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = -2187$$

हम देखते हैं कि $(-3)^5 \times (-3)^2 = (-3)^7 = (-3)^{5+2}$

उदाहरण 2 : $\left(\frac{2}{3}\right)^4$ और $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ का गुणा कीजिए तथा गुणनफल को घातांक के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$$

$$\text{तथा, } \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

$$\text{इस प्रकार, } \left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{16}{81} \times \frac{8}{27} = \frac{128}{2187}$$

अब आइए $\left(\frac{2}{3}\right)^7$ ज्ञात करें। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^7 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{128}{2187}$$

पुनः हम देखते हैं कि

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^7 = \left(\frac{2}{3}\right)^{4+3}$$

हम देखते हैं कि जब हम एक ही आधार वाली (घातांकीय संकेतन में लिखी) दो संख्याओं का गुणा करते हैं, तो हमें उसी आधार वाली तथा ऐसे घातांक वाली संख्या प्राप्त होती है जोकि दो हुई संख्याओं के घातांकों के योग के बराबर है। संक्षेप में हम कहते हैं कि जब आधार एक ही हों तो, गुणन में, घातांक जुड़ जाते हैं।

चिन्हों और संकेतों का प्रयोग कर हम लिखते हैं कि

यदि h एक शून्येतर परिमेय संख्या है तथा m और n पूर्ण संख्याएँ हैं, तो

$$h^m \cdot h^n = h^{m+n}$$

हम कुछ और उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 3 : $\left(\frac{4}{5}\right)^1 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि आधार एक ही है। इस प्रकार, गुणन में, घातांक जुड़ जाने चाहिए।

$$\text{अर्थात्, } \left(\frac{4}{5}\right)^1 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^{1+2} = \left(\frac{4}{5}\right)^3$$

$$\frac{1024}{3125}$$

उदाहरण 4 : मान ज्ञात कीजिए :

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

हल : पुनः आधार एक ही हैं। इस प्रकार, गुणन में, घातांक जुड़ जाने चाहिए। हमें निम्न प्राप्त होता है

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{5+3+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^9 \\ &= -\frac{1}{512} \end{aligned}$$

प्रश्नावली 9.2

1. निम्न की सत्यता की जाँच कीजिए :

$$(i) 2^3 \times 2^6 = 2^9$$

$$(ii) \left(-\frac{5}{6}\right)^2 \times \left(-\frac{5}{6}\right)^3 = \left(-\frac{5}{6}\right)^5$$

$$(iii) (-3)^4 \times (-3)^2 = (-3)^8$$

2. निम्न कथनों में से कौन-कौन से कथन सत्य हैं ?

$$(i) 2^3 \times 2^4 = 2^{12}$$

$$(ii) \left(-\frac{2}{3}\right)^8 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right)^{14}$$

$$(iii) \left(\frac{3}{7}\right)^{10} = \left(\frac{3}{7}\right)^2 \times \left(\frac{3}{7}\right)^8$$

$$(iv) (-5)^8 \times (-5)^3 = (-5)^{24}$$

$$(v) (3.1)^4 \times (3.1) = (3.1)^5$$

$$(vi) 7^9 \times 7^3 \times 7^0 = 7^{12}$$

3. मान निकालिए :

$$(i) 3^3 \times 3^3$$

$$(ii) (-10)^5 \times (-10)^8$$

$$(iii) \left(\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

$$(iv) \left(-\frac{4}{5}\right)^2 \times \left(-\frac{4}{5}\right)^3 \times \left(-\frac{4}{5}\right)$$

$$(v) \left(\frac{5}{7}\right)^0 \times \left(\frac{5}{7}\right)^3$$

$$(vi) (1.2) \times (1.2)^3$$

4. 'a' ज्ञात कीजिए ताकि

$$(-3)^3 \times (-3)^7 = (-3)^{2a} \text{ हो।}$$

$$[\text{संकेत : } 3+7=2a]$$

हम देखते हैं कि जब हम एक ही आधार वाली (घातांकीय संकेतन में लिखी) दो संख्याओं का गुणा करते हैं, तो हमें उसी आधार वाली तथा ऐसे घातांक वाली संख्या प्राप्त होती है जोकि दो हुई संख्याओं के घातांकों के योग के बराबर है। संक्षेप में हम कहते हैं कि जब आधार एक ही हों तो, गुणन में, घातांक जुड़ जाते हैं।

चिन्हों और संकेतों का प्रयोग कर हम लिखते हैं कि

यदि h एक शून्येतर परिमेय संख्या है तथा m और n पूर्ण संख्याएँ हैं, तो

$$h^m \cdot h^n = h^{m+n}$$

हम कुछ और उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 3 : $\left(\frac{4}{5}\right)^1 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि आधार एक ही है। इस प्रकार, गुणन में, घातांक जुड़ जाने चाहिए।

$$\text{अर्थात्, } \left(\frac{4}{5}\right)^1 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^{1+2} = \left(\frac{4}{5}\right)^3$$

$$\frac{1024}{3125}$$

उदाहरण 4 : मान ज्ञात कीजिए :

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

हल : पुनः आधार एक ही हैं। इस प्रकार, गुणन में, घातांक जुड़ जाने चाहिए। हमें निम्न प्राप्त होता है

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{5+3+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^9 \\ &= -\frac{1}{512} \end{aligned}$$

प्रश्नावली 9.2

1. निम्न की सत्यता की जाँच कीजिए :

$$(i) 2^3 \times 2^6 = 2^9$$

$$(ii) \left(-\frac{5}{6}\right)^2 \times \left(-\frac{5}{6}\right)^3 = \left(-\frac{5}{6}\right)^5$$

$$(iii) (-3)^4 \times (-3)^2 = (-3)^8$$

2. निम्न कथनों में से कौन-कौन से कथन सत्य हैं ?

$$(i) 2^3 \times 2^4 = 2^{12}$$

$$(ii) \left(-\frac{2}{3}\right)^8 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right)^{14}$$

$$(iii) \left(\frac{3}{7}\right)^{10} = \left(\frac{3}{7}\right)^2 \times \left(\frac{3}{7}\right)^8$$

$$(iv) (-5)^8 \times (-5)^3 = (-5)^{24}$$

$$(v) (3.1)^4 \times (3.1) = (3.1)^5$$

$$(vi) 7^9 \times 7^3 \times 7^0 = 7^{12}$$

3. मान निकालिए :

$$(i) 3^3 \times 3^3$$

$$(ii) (-10)^5 \times (-10)^8$$

$$(iii) \left(\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

$$(iv) \left(-\frac{4}{5}\right)^2 \times \left(-\frac{4}{5}\right)^3 \times \left(-\frac{4}{5}\right)$$

$$(v) \left(\frac{5}{7}\right)^0 \times \left(\frac{5}{7}\right)^3$$

$$(vi) (1.2) \times (1.2)^3$$

4. 'a' ज्ञात कीजिए ताकि

$$(-3)^3 \times (-3)^7 = (-3)^{2a} \text{ हो।}$$

$$[\text{संकेत : } 3+7=2a]$$

5. 'a' ज्ञात कीजिए ताकि

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{a+5} = \left(\frac{2}{5}\right)^{15} \text{ हो।}$$

9.2.2 अब हम घातांकीय संकेतन में लिखी एक ही आधार वाली संख्याओं के विभाजन पर विचार करते हैं। उदाहरणार्थ, निम्न उदाहरणों पर विचार कीजिए :

उदाहरण 5 : $(-2)^6$ को $(-2)^2$ से भाग दीजिए और परिणाम को घातांकीय संकेतन में लिखिए।

हल : हम $(-2)^6 \div (-2)^2$ अर्थात् $\frac{(-2)^6}{(-2)^2}$ ज्ञात करना चाहते हैं और परिणाम को घातांकीय संकेतन में लिखना चाहते हैं।

हम जानते हैं कि

$$(-2)^6 = 64$$

तथा,
$$(-2)^2 = 4$$

इस प्रकार,
$$\frac{(-2)^6}{(-2)^2} = \frac{64}{4} = 16$$

अब आइए $(-2)^4$ ज्ञात करें। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 16$$

हम देखते हैं कि

$$\frac{(-2)^6}{(-2)^2} = (-2)^{6-2} = (-2)^4$$

उदाहरण 6 : $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$ को $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$ से भाग दीजिए।

हल : हम जानते हैं कि

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32}$$

तथा, $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$

इस प्रकार,
$$\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^5}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{-\frac{1}{32}}{-\frac{1}{8}} = \frac{1}{4}$$

अब आइए $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$ ज्ञात करें। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

हम देखते हैं कि

$$\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^5}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{5-3}$$

हम देखते हैं कि जब हम एक ही आधार वाली (घातांकीय संकेतन में लिखी) दो संख्याओं का विभाजन करते हैं तो हमें उसी आधार वाली और ऐसे घातांक वाली संख्या प्राप्त होती है जो कि दो हुई संख्याओं के घातांकों के अन्तर के बराबर है। संक्षेप में हम कहते हैं कि जब आधार एक ही हों तो, विभाजन में, हम घातांकों का अन्तर लेते हैं।

चिन्हों और संकेतों का प्रयोग कर हम इसे इस प्रकार लिखते हैं :

यदि b एक शून्येतर परिमेय संख्या है तथा m और n ऐसी पूर्ण संख्याएँ हैं कि $m \geq n$, तो

$$\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$$

अब हम कुछ और उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 7 : $\left(\frac{3}{4}\right)^6 \div \left(\frac{3}{4}\right)^4$ का मान निकालिए।

हल : हम देखते हैं कि आधार एक ही है। अतः, विभाजन में, हमें घातांकों का अन्तर लेना चाहिए।

$$\begin{aligned} \text{अर्थात्, } \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^6}{\left(\frac{3}{4}\right)^4} &= \left(\frac{3}{4}\right)^{6-4} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \\ &= \frac{9}{16} \end{aligned}$$

उदाहरण 8 : $\frac{\left(\frac{-5}{9}\right)^8}{\left(\frac{-5}{9}\right)^6}$ का मान निकालिए।

हल : उपर्युक्त नियम का प्रयोग करने पर,

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{-5}{9}\right)^8}{\left(\frac{-5}{9}\right)^6} &= \left(\frac{-5}{9}\right)^{8-6} = \left(\frac{-5}{9}\right)^2 \\ &= \frac{-125}{729} \end{aligned}$$

अब आइए निम्न उदाहरण पर विचार करें :

उदाहरण 9 : $3^3 \div 3^5$ का मान निकालिए।

हल : हम जानते हैं कि

$$3^3 = 3 \times 3 \times 3$$

$$\text{तथा, } 3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

$$\text{इस प्रकार, } 3^3 \div 3^5 = \frac{3^3}{3^5} = \frac{3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{1}{3 \times 3} = \frac{1}{3^2}$$

$$\text{अर्थात्, } \frac{3^3}{3^5} = \frac{1}{3^{5-3}} = \frac{1}{3^2}$$

यह बड़ी सरलता से दिखाया जा सकता है कि यदि b एक शून्येतर परिमेय संख्या है तथा m और n ऐसी पूर्ण संख्याएँ हैं कि $m \leq n$, तो

$$\frac{b^m}{b^n} = \frac{1}{b^{n-m}}$$

अब हम निम्न संकेतन प्रविष्ट कर रहे हैं :

यदि b एक शून्येतर परिमेय संख्या है तथा r एक पूर्ण संख्या, तो हम व्यंजक

$$\frac{1}{\underbrace{b \times b \times b \times \dots \times b}_{(r \text{ बार})}} \text{ को } b^{-r} \text{ से व्यक्त करते हैं।}$$

अर्थात् हम लिखते हैं कि

$$b^{-r} = \frac{1}{\underbrace{b \times b \times b \times \dots \times b}_{(r \text{ बार})}} = \frac{1}{b^r}$$

इस संकेतन से हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\frac{1}{b^{n-m}} = b^{-(n-m)} = b^{m-n}$$

इस प्रकार, हमें $\frac{b^m}{b^n}$ जब कि $m \geq n$ या $m \leq n$ है के लिए पृथक-पृथक

नियम लिखने की आवश्यकता नहीं है। केवल यह याद रखना ही पर्याप्त है कि, विभाजन में, हम घातांकों का अन्तर लेते हैं। यदि हमें एक ऋणात्मक घातांक

प्राप्त हो तो हम पीछे प्रविष्ट किए गए संकेतन का प्रयोग कर सकते हैं और उसे इस प्रकार लिख सकते हैं कि अंत में एक घनात्मक घातांक प्राप्त हो। हम एक और उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 10 : ज्ञात कीजिए :

$$(क) \frac{(-5)^6}{(-5)^3}$$

$$(ख) \frac{(-2)^7}{(-2)^{18}}$$

हल : (क) आपको याद होगा कि, विभाजन में, हम घातांकों का अन्तर लेते हैं। इस प्रकार,

$$\begin{aligned} \frac{(-5)^6}{(-5)^3} &= (-5)^{6-3} = (-5)^3 \\ &= -125 \end{aligned}$$

(ख) पुनः आपको याद होगा कि, विभाजन में, हम घातांकों का अंतर लिखते हैं। इस प्रकार,

$$\frac{(-2)^7}{(-2)^{18}} = (-2)^{7-18} = (-2)^{-9}$$

यहाँ हमें एक ऋणात्मक घातांक प्राप्त हुआ है। हम उस संकेतन का प्रयोग कर, जो हमने प्रविष्ट किया है, निम्न प्राप्त करते हैं :

$$(-2)^{-9} = \frac{1}{(-2)^9} = -\frac{1}{512}$$

$$\text{इस प्रकार, } \frac{(-2)^7}{(-2)^{18}} = (-2)^{-9} = \frac{1}{(-2)^9} = -\frac{1}{512}$$

प्रश्नावली 9.3

1. निम्न में से प्रत्येक की सत्यता की जाँच कीजिए :

$$(i) \left(\frac{2}{3}\right)^4 \div \left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$(ii) \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{11}}{\left(\frac{1}{4}\right)^7} = \left(\frac{1}{4}\right)^4$$

$$(iii) \left(\frac{12}{25}\right)^6 \div \left(\frac{12}{25}\right)^6 = \left(\frac{12}{25}\right)^0 = 1$$

2. निम्न कथनों में से कौन-कौन से कथन सत्य हैं ?

$$(i) 2^6 \div 2^3 = 2^3$$

$$(ii) 2^6 \div 2^2 = 2^8$$

$$(iii) \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^9}{\left(-\frac{2}{3}\right)^6} = \left(-\frac{2}{3}\right)^4$$

$$(iv) \frac{(-5)^9}{(-5)^3} = (-5)^3$$

$$(v) (0.6)^8 \div (0.6)^0 = (0.6)^7 \quad (vi) \left(\frac{3}{4}\right)^{12} \div \left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^{11}$$

3. मान निकालिए :

$$(i) \left(\frac{1}{3}\right)^4 \div \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$(ii) (-2)^5 \div (-2)^3$$

$$(iii) (3^4 \times 3^5) \div (3^2 \times 3^3)$$

$$(iv) (4^3 \times 4) \div (2^2 \times 2^0)$$

$$*(v) (2^4 \times 3^5) \div (2^3 \times 3^2)$$

$$(vi) (3^6 \div 3^4) \times (3^7 \div 3^5)$$

$$(vii) (5^3 \div 5) \times (2^4 \div 2^2)$$

$$(viii) \frac{8^5}{4^5}$$

$$(ix) \frac{2^5}{2^8}$$

$$(x) 5^9 \div 5^{12}$$

$$*(xi) \frac{27^3}{9^3}$$

$$(xii) \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^8}{\left(-\frac{1}{2}\right)^5} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^5}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}$$

$$(xiii) \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5}{\left(\frac{1}{3}\right)^3} - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^6}{\left(\frac{1}{3}\right)^5}$$

4. निम्न में से प्रत्येक में 'a' ज्ञात कीजिए ।

$$(i) \left(\frac{2}{7}\right)^8 \div \left(\frac{2}{7}\right)^5 = \left(\frac{2}{7}\right)^{2a+1}$$

$$(ii) \left(\frac{-8}{3}\right)^{11} \div \left(\frac{-8}{3}\right)^3 = \left(\frac{-8}{3}\right)^{2a+2}$$

9.2.3 अब हम घातांकीय संकेतन में लिखी किसी संख्या की घात के लिए नियम विकसित करेंगे ।

उदाहरणार्थ, निम्न पर विचार कीजिए :

$$(3^3)^2 = 3^3 \times 3^3 \quad (\text{परिभाषा से})$$

चूँकि आधार एक ही हैं, घातांक जुड़ जाने चाहिए ।

$$\begin{aligned} \text{इस प्रकार, } (3^3)^2 &= 3^{3+3} \\ &= 3^6 \end{aligned}$$

हम देखते हैं कि

$$(3^3)^2 = 3^6 = 3^{3 \times 2}$$

आइए एक अन्य उदाहरण लें ।

उदाहरण 11 : $\left[\left(\frac{-2}{3}\right)^4\right]^3$ का मान निकालिए ।

हल : परिभाषा से,

$$\left[\left(-\frac{2}{3} \right)^4 \right]^3 = \left(-\frac{2}{3} \right)^4 \times \left(-\frac{2}{3} \right)^4 \times \left(-\frac{2}{3} \right)^4$$

अब आधार एक ही हैं। इस प्रकार, गुणन में, घातांक जुड़ जाने चाहिए। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\begin{aligned} \left[\left(-\frac{2}{3} \right)^4 \right]^3 &= \left(-\frac{2}{3} \right)^{4+4+4} = \left(-\frac{2}{3} \right)^{12} \\ &= \frac{4096}{531441} \end{aligned}$$

हम पुनः देखते हैं कि

$$\left[\left(-\frac{2}{3} \right)^4 \right]^3 = \left(-\frac{2}{3} \right)^{12} = \left(-\frac{2}{3} \right)^{4 \times 3}$$

चिन्हों और संकेतों का प्रयोग कर हम इसे निम्न प्रकार लिखते हैं :

यदि b एक शून्येतर परिमेय संख्या है तथा m और n पूर्ण संख्याएँ हैं, तो

$$(b^m)^n = b^{mn}$$

हम एक अन्य उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 12 : यदि $\left[\left(\frac{4}{5} \right)^2 \right]^4 = \left(\frac{4}{5} \right)^{3a-1}$ हो, तो 'a' ज्ञात कीजिए।

हल : हम उपर्युक्त नियम का प्रयोग करते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं :

$$\text{वाम पक्ष} = \left[\left(\frac{4}{5} \right)^2 \right]^4 = \left(\frac{4}{5} \right)^{2 \times 4} = \left(\frac{4}{5} \right)^8$$

$$\text{अतः,} \quad \left(\frac{4}{5} \right)^8 = \left(\frac{4}{5} \right)^{3a-1}$$

$$\text{जिससे,} \quad 8 = 3a - 1$$

$$\text{इस प्रकार,} \quad a = 3$$

प्रश्नावली 9.4

1. मान निकालिए :

$$(i) (2^4)^3 \quad (ii) \left[\left(-\frac{2}{7} \right)^2 \right]^2 \quad (iii) [(-4)^3]^2$$

$$(iv) (3^2)^3$$

$$*(v) \cdot \left[\left(\frac{4}{5} \right)^3 \right]^4$$

[अपना उत्तर घातांकीय संकेतन में ही रहने दीजिए।]

$$(vi) [(-9)^6]^5$$

[अपना उत्तर घातांकीय संकेतन में ही रहने दीजिए।]

2. 'a' ज्ञात कीजिए ताकि

$$\left[\left(\frac{2}{11} \right)^8 \right]^3 = \left(\frac{2}{11} \right)^{a+1} \text{ हो।}$$

3. मान निकालिए और परिणाम को घातांकीय संकेतन में व्यक्त कीजिए :

$$(i) (5^4)^3 \times (5^2)^4$$

$$(ii) (8^3)^5 \times (8^2)^4$$

$$(iii) [(0.1)^4]^3 \div [(0.1)^2]^4$$

$$(iv) [(2.2)^5]^2 \div [(2.2)^2]^3$$

$$(v) \left[\left(\frac{1}{2} \right)^3 \times \left(\frac{1}{2} \right)^4 \right]^5$$

$$(vi) (7^4 \times 7^2)^8$$

$$(vii) [5^{10} \div 5^8]^{10}$$

$$(viii) \left(\frac{9^4 \times 9^6}{9^8} \right)^3$$

$$(ix) \left[\frac{\left(\frac{2}{3} \right)^8 \times \left(\frac{2}{3} \right)}{\left(\frac{2}{3} \right)^9} \right]^2$$

4. यदि $25 \times 5^a = 5^4$ हो, तो 'a' ज्ञात कीजिए।
5. यदि $9 \times 3^4 = 3^a$ हो, तो 'a' ज्ञात कीजिए।

9.3 घातांकीय संकेतन का उपयोग

प्रायः हमें बहुत बड़ी या बहुत छोटी संख्याओं का प्रयोग करना होता है। ऐसी स्थितियों में घातांकीय संकेतन बहुत उपयोगी रहता है। उदाहरणार्थ, सूर्य की पृथ्वी से दूरी पर विचार कीजिए। यह ज्ञात है कि यह दूरी लगभग 15,00,00,000 किलोमीटर है। घातांकीय संकेतन का उपयोग कर हम इसे 15×10^7 किलोमीटर अथवा 1.5×10^8 किलोमीटर के रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

भूगोल में हम पढ़ते हैं कि पृथ्वी का पृष्ठ क्षेत्रफल लगभग 51,00,00,000 वर्ग किलोमीटर है, जिसमें से भूमि ने लगभग 14,90,00,000 वर्ग किलोमीटर तथा पानी ने लगभग 36,10,00,000 वर्ग किलोमीटर क्षेत्र घेरा हुआ है। घातांकीय संकेतनों का उपयोग कर हम उपर्युक्त पृष्ठ क्षेत्रफलों को क्रमशः लगभग 51×10^7 वर्ग किलोमीटर, $149 \times 10^6 (= 14.9 \times 10^7)$ वर्ग किलोमीटर तथा $361 \times 10^6 (= 36.1 \times 10^7)$ वर्ग किलोमीटर के रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

हम नीचे ऐसी स्थितियों के कुछ और उदाहरण दे रहे हैं जहाँ हमें बहुत बड़ी या बहुत छोटी संख्याएँ देखने को मिलती हैं। हम इन संख्याओं को घातांकीय संकेतन में भी व्यक्त कर रहे हैं।

- | | |
|---|--|
| (1) TDC-316 कंप्यूटर (लगभग) | 9×10^8 संक्रियाएँ प्रति घंटा |
| 90,00,00,000 संक्रियाएँ (योग, व्यवकलन) प्रति घंटा करता है। | |
| (2) भारी शारीरिक कार्य में लगे व्यक्ति की आवश्यक ऊर्जा लगभग | 164×10^3 जूल प्रति दिन |
| 16,400 जूल (joules) प्रति दिन है। | $[= 16.4 \times 10^3 \text{ जूल प्रति दिन}]$ |

- (3) भारतीय समुद्री-सीमा की लम्बाई 61×10^3 किलोमीटर
लगभग 6100 किलोमीटर है। $[=6.1 \times 10^3 \text{ किलोमीटर}]$
- (4) सोने के एक औंस (ounce) में लगभग 865×10^{19} परमाणु
 $8,65,00,00,00,00,00,00,00,00,00,00$ $[=8.65 \times 10^{21} \text{ परमाणु}]$
परमाणु (atoms) होते हैं।
- (5) रक्त के एक ही लाल कोषाणु 27×10^7 अणु
(red cell) में लगभग $[=2.7 \times 10^8 \text{ अणु}]$
 $27,00,00,000$ हीमोग्लोबिन
(hemoglobin) के अणु
(molecules) होते हैं।
- (6) TDC—316 कम्प्यूटर द्वारा 4×10^{-6} सैकन्ड
योग या व्यवकलन की एक संक्रिया
पूरी करने में लिया गया समय
लगभग $\frac{4}{10,00,000}$ सैकन्ड
होता है।
- (7) तरंग-दैर्घ्य (wavelength) मापने $\text{\AA} = 10^{-10}$ मीटर
का मात्रक एंग्स्ट्रॉम (angstrom)
कहलाता है और इसे संकेत \AA से
से व्यक्त किया जाता है।
 $\text{\AA} = \frac{1}{10,00,00,00,00,00}$ मीटर

मुख्य संकल्पनाएँ

आधार
घातांक

घातांकों के नियम
घातांकीय संकेतन

विशेष गुणनफल और गुणनखंडन

इस एकक में हम सीखेंगे कि एक एकपदी और एक बहुपद का किस प्रकार गुणा किया जाता है। हम कुछ विशेष गुणनफलों, जैसे कि एक द्विपद का वर्ग तथा दो संख्याओं के योग और अंतर का गुणा, पर विचार करेंगे। अंत में हम पूर्ण वर्ग त्रिपदों (perfect square trinomials) और दो वर्गों के अंतर का गुणनखंडन सीखेंगे।

10.1 पुनरावलोकन

आपको अपनी पिछली कक्षाओं से बीजीय व्यंजकों के गुणन का पुनरावलोकन करना चाहिए। विशेष रूप से, आपको निम्न संकल्पनाओं को दोहराना चाहिए :

दो या अधिक एकपदियों का गुणन

दो द्विपदों का गुणन

आपको एक द्विपद का वर्ग लिखने की विधि को भी दोहराना चाहिए, अर्थात् यह कि

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

शब्दों में, हम कहते हैं कि एक द्विपद का वर्ग, पहले पद के वर्ग, दूसरे पद के वर्ग और दोनों पदों के गुणनफल के दुगुने के योग के बराबर होता है।

हम नीचे कुछ प्रश्न दे रहे हैं ताकि आप उपर्युक्त संकल्पनाओं को दोहरा सकें तथा उनका अनुप्रयोग कर सकें।

प्रश्नावली 10.1

निम्न गुणनफल ज्ञात कीजिए :

1. $x^4 \times x^7$

2. $y^2 \times y^6$

3. $a^0 \times a^3$

4. $a^6 \times a^{14}$

5. $2x^3 \times \frac{1}{3}x^7$

6. $-\frac{1}{7}y^5 \times \frac{10}{11}y^{13}$

7. $\frac{1}{2}y^4 \times \frac{3}{4}y^6$

8. $\frac{5}{13}b^3 \times 13b$

9. $7a^7 \times \frac{3}{7}a^5 \times 4a^2$

10. $(-4x^2)(-2x)(-6x^3)$

11. $3d^3 \times (-2d^2) \times (-d^5)$

12. $4a\left(\frac{3}{2}a^2 + \frac{3}{4}\right)$

[13. $\frac{1}{2}y^3(3y^2-4y)$

14. $2a^2\left(\frac{1}{2}a^2+4a\right)$

15. $\left(-\frac{3}{8}y^3\right)\left(4y^3 + \frac{8}{3}y\right)$

16. $3y(6y^3-4y^2)$

17. $-2d^3(6d-5d^4)$

18. $(2x+3)(7x-4)$

19. $\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)$

20. $(2x-a)(2x-b)$

21. $(x+7)^2$

22. $(3x-1)^2$

23. $\left(\frac{1}{2}x-4\right)^2$

24. $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$

25. $(5x+3)(5x-3)$

26. $(3x+1)(x+2)$

27. $(x^2+x)^2$

28. $\left(y+\frac{y^2}{2}\right)^2$

29. $\left(x+\frac{2}{3}\right)(x-5)$

30. $\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\left(\frac{x}{3}+1\right)$

10.2 एकपदी और बहुपद का गुणन

हम पहले ही जानते हैं कि एक एकपदी और एक द्विपद का किस प्रकार गुणा किया जाता है। आइए अब एक एकपदी और एक बहुपद का गुणा करना सीखें। हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : $2x$ और $3x^2-5x+2$ का गुणा कीजिए।

हल : हम गुणन के वितरणात्मक गुण (distributive property) का प्रयोग करते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं :

$$\begin{aligned} 2x(3x^2-5x+2) &= 2x(3x^2) + 2x(-5x) + 2x(2) \\ &= 6x^3 - 10x^2 + 4x \end{aligned}$$

उदाहरण 2 : $4b^3$ और $-3b^2+b^5-b+1$ का गुणा कीजिए।

हल : पुनः हम गुणन के वितरणात्मक गुण का प्रयोग करते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं :

$$\begin{aligned} 4b^3(-3b^2+b^5-b+1) &= 4b^3(-3b^2) + 4b^3(b^5) + 4b^3(-b) + 4b^3(1) \\ &= -12b^5 + 4b^8 - 4b^4 + 4b^3 \end{aligned}$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि एक बार वितरणात्मक गुण का प्रयोग करने के बाद गुणन, केवल एकपदियों का गुणन ही रह जाता है।

उदाहरण 3 : दर्शाए गए गुणन कीजिए और समान पदों को जोड़िए :

$$4a(2a^2-6a+5)-3a^2(6a^3-3)+a^5(a+2)$$

हल : उपर्युक्त उदाहरणों की तरह हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\begin{aligned}
 & 4a(2a^2-6a+5)-3a^2(6a^3-3)+a^5(a+2) \\
 & = 8a^3-24a^2+20a-(18a^5-9a^2)+(a^6+2a^5) \\
 & = 8a^3-24a^2+20a-18a^5+9a^2+a^6+2a^5 \\
 & = 8a^3-15a^2+20a-16a^5+a^6
 \end{aligned}$$

प्रश्नावली 10.2

दर्शाए गए गुणन कीजिए :

1. $2y^2 \left(\frac{1}{2}y^2 + 4y - 2 \right)$
 2. $-\frac{3}{8}b^3 \left(\frac{8}{3}b^3 + \frac{2}{3}b - b^{\frac{1}{3}} \right)$
 3. $3x^2(5x^2-7x+2)$
 4. $2a(a^2-3a+5)$
 5. $-3y^2(2y+4y^2-3+2y^3)$
 6. $\frac{1}{4}x \left(\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2}x + 4 \right)$
 7. $7y^2(-y^3+3y^2-y-6)$
 8. $4p^4(-5p^2+3p-2)$
 9. $(-5a^2+3a^3-a-3)a^3$
 10. $3(-7a^3-5a+a^2+a^4-a^5)a^2$
- दर्शाए गए गुणन कीजिए और समान पदों को जोड़िए :
11. $3x^4(2x^3-5x^4)-5x^3(x^4-3x^5)$
 12. $3b^4(6b^3-5+4b^2)-6b^4(3b^3+2b^2)$
 13. $8p^3(4p^2-3)-4p^3(8p^2-3p^3-6)$
 14. $4c^4(2-3c^5)+3c^4(4+3c)-2c^2(4c^2-3c^3)$
 15. $x(x^3-3x+1)+x^2(x^3-x)-x^3(x^4+x^2-1)+7(3x^2+x-4)$

10.3 विशेष गुणनफल

बहुत से प्रश्नों में कुछ बहुपद ऐसे गुणनखंडों के रूप में बार-बार आते हैं जिनका गुणा किया जाना होता है। अतः यह सुविधाजनक है कि इन गुणनफलों को मस्तिष्क में ही ज्ञात करना और तेजी के साथ लिखना सीखा जाए। हम इन्हें विशेष गुणनफल (special products) कहते हैं। हम ऐसे दो विशेष गुणनफल पहले ही पढ़ चुके हैं, अर्थात् यह है कि

$$I \quad (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$II \quad (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

हम नीचे उपर्युक्त दो गुणनफलों को याद रखने की सुविधाजनक विधि दर्शा रहे हैं।

$$(x \pm y)^2 = x^2 + y^2 \pm 2xy$$

x का वर्ग $\xrightarrow{\quad}$ x^2 $\xrightarrow{\quad}$ y^2 $\xrightarrow{\quad}$ $\pm 2xy$
 y का वर्ग $\xrightarrow{\quad}$ y^2 $\xrightarrow{\quad}$ $\pm 2xy$
 x और y के गुणनफल का दुगुना $\xrightarrow{\quad}$ $\pm 2xy$

यदि द्विपद दो संख्याओं का योग है तो जोड़िए
 यदि द्विपद दो संख्याओं का अंतर है तो घटाइए

यह नियम हमारे लिए दूसरी प्रकृति बन जाना चाहिए। हमें किसी भी द्विपद का वर्ग तुरन्त लिखने में समर्थ होना चाहिए। हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : $(2a+3b)^2$ ज्ञात कीजिए।

हल : हम नियम का प्रयोग करते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं :

$$(2a+3b)^2 = 4a^2 + 9b^2 + 12ab$$

$$(2a)^2 \xrightarrow{\quad} 4a^2 \xrightarrow{\quad} 9b^2 \xrightarrow{\quad} 12ab$$

$$(3b)^2 \xrightarrow{\quad} 9b^2 \xrightarrow{\quad} 12ab$$

$$2(2a)(3b) \xrightarrow{\quad} 12ab$$

$$\text{अर्थात्, } (2a+3b)^2 = 4a^2 + 9b^2 + 12ab$$

उदाहरण 2 : $(3x-4y^2)^2$ ज्ञात कीजिए ।

हल : हम पुनः नियम का प्रयोग करते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं :

$$\begin{array}{rcl}
 (3x-4y^2)^2 & = & 9x^2 + 16y^4 - 24xy^2 \\
 (3x)^2 & \xrightarrow{\quad \uparrow \quad} & \\
 (4y^2)^2 & \xrightarrow{\quad \uparrow \quad} & \text{जोड़िए} \\
 2(3x)(4y^2) & \xrightarrow{\quad \uparrow \quad} & \text{घटाइए}
 \end{array}$$

अर्थात्, $(3x-4y^2)^2 = 9x^2 + 16y^4 - 24xy^2$

अब हम दो और विशेष गुणनफलों पर विचार करते हैं। आइए पहले दो संख्याओं के योग और अंतर का गुणनफल ज्ञात करें। इस बात की सरलता से जाँच की जा सकती है कि

$$III \quad (x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

शब्दों में हम कहते हैं कि दो संख्याओं के योग और अन्तर का गुणनफल उनके वर्गों के अन्तर के बराबर होता है। हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 3 : $(4y-9z)(4y+9z)$ ज्ञात कीजिए।

हल : नियम III का प्रयोग करने पर हमें तुरन्त निम्न प्राप्त होता है :

$$\begin{array}{rcl}
 (4y-9z)(4y+9z) & = & 16y^2 - 81z^2 \\
 (4y)^2 & \xrightarrow{\quad \uparrow \quad} & \\
 (9z)^2 & \xrightarrow{\quad \uparrow \quad} & \text{घटाइए}
 \end{array}$$

अर्थात्, $(4y-9z)(4y+9z) = 16y^2 - 81z^2$

उदाहरण 4 : $\left(\frac{1}{2}a^2 - b\right)\left(\frac{1}{2}a^2 + b\right)$ ज्ञात कीजिए।

हल : पुनः हम नियम III का प्रयोग करते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं :

$$\left(\frac{1}{2}a^2 - b\right)\left(\frac{1}{2}a^2 + b\right) = \frac{1}{4}a^4 - b^2$$

$\left(\frac{1}{2}a^2\right)^2$ ————— ↑
 $(b)^2$ ————— घटाइए ↑

अर्थात्, $\left(\frac{1}{2}a^2 - b\right)\left(\frac{1}{2}a^2 + b\right) = \frac{1}{4}a^4 - b^2$

अंत में, आइए समान पदों वाले दो द्विपदों का गुणनफल ज्ञात करें। पहले हम निम्न उदाहरण पर विचार करते हैं :

उदाहरण 5 : $(4x+3y)(3x-5y)$ ज्ञात कीजिए।

हल : हम गुणन के वितरणात्मक गुण का प्रयोग कर सकते हैं और दिए हुए द्विपदों के गुणन को एकपदियों के गुणन में परिवर्तित कर सकते हैं। परन्तु हम गुणनफल को तुरन्त ही लिखने में समर्थ होना चाहते हैं। हम वांछित चरणों को नीचे दर्शा रहे हैं :

$$(4x+3y)(3x-5y) = 12x^2 - 15y^2 - 11xy$$

$(4x)(3x)$ ————— ↑
 $(3y)(-5y)$ ————— ↑
 $(4x)(-5y) + (3y)(3x) = -20xy + 9xy$ ————— ↑

अर्थात्, $(4x+3y)(3x-5y) = 12x^2 - 15y^2 - 11xy$

इस प्रकार हमें चौथा विशेष गुणनफल प्राप्त होता है जो निम्न है :

IV $(ax+by)(cx+dy) = acx^2 + bdy^2 + (ad+bc)xy$

$(ax)(cx)$ ————— ↑
 $(by)(dy)$ ————— ↑
 $(ax)(dy) + (by)(cx) = adxy + bcxy$ ————— ↑

हम कुछ और उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 6 : $(2x+3)$ और $(7x-4)$ का गुणा कीजिए।

हल : हम नियम IV का प्रयोग करते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं :

$$\begin{array}{rcl}
 (2x+3)(7x-4) & = & 14x^2 - 12 + 13x \\
 (2x)(7x) & \xrightarrow{\quad \uparrow \quad} & \\
 (3)(-4) & \xrightarrow{\quad \quad \quad \uparrow \quad} & \\
 (2x)(-4) + (3)(7x) & = & -8x + 21x \xrightarrow{\quad \quad \quad \uparrow \quad}
 \end{array}$$

अर्थात्, $(2x+3)(7x-4) = 14x^2 + 13x - 12$

उदाहरण 7 : $(4x^2-5y)$ और $(5x^2+8y)$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल : पुनः हम नियम IV का प्रयोग करते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं :

$$\begin{array}{rcl}
 (4x^2-5y)(5x^2+8y) & = & 20x^4 - 40y^2 + 7x^2y \\
 (4x^2)(5x^2) & \xrightarrow{\quad \quad \quad \uparrow \quad} & \\
 (-5y)(8y) & \xrightarrow{\quad \quad \quad \uparrow \quad} & \\
 (4x^2)(8y) + (-5y)(5x^2) & = & 32x^2y - 25x^2y \xrightarrow{\quad \quad \quad \uparrow \quad}
 \end{array}$$

अर्थात्, $(4x^2-5y)(5x^2+8y) = 20x^4 + 7x^2y - 40y^2$

हम संख्याओं के गुणनफल तुरन्त ही परिकलित करने में भी उपर्युक्त नियमों का प्रयोग कर सकते हैं। उदाहरणार्थ,

$$\begin{aligned}
 104 \times 96 &= (100+4)(100-4) = 100^2 - 4^2 && \text{(नियम III)} \\
 &= 10000 - 16 = 9984
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 101^2 &= (100+1)^2 = 100^2 + 1^2 + 2(100)(1) && \text{(नियम I)} \\
 &= 10201
 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{39}{40}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{40}\right)^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{40}\right)^2 - 2(1)\left(\frac{1}{40}\right) \quad (\text{नियम II})$$

$$= \frac{1521}{1600}$$

$$\text{अथवा, } \left(\frac{39}{40}\right)^2 = \left(\frac{40-1}{40}\right)^2 = \frac{40^2 + 1^2 - 2(40)(1)}{40^2}$$

$$= \frac{1521}{1600}$$

पुनः इन नियमों का कुछ त्रिपदों के गुणनफल परिकलित करने में भी युक्ति-पूर्वक प्रयोग किया जा सकता है। हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 8 : $(2x-3y+4z)$ और $(2x-3y-4z)$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल : हम पदों के समूह बनाकर नियम III का प्रयोग कर सकते हैं। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$(2x-3y+4z)(2x-3y-4z) = (2x-3y)^2 - (4z)^2$$

अब नियम II का प्रयोग करके $(2x-3y)^2$ को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :

$$(2x-3y)^2 = 4x^2 + 9y^2 - 12xy$$

$$\text{इस प्रकार, } (2x-3y+4z)(2x-3y-4z) = 4x^2 + 9y^2 - 12xy - 16z^2$$

उदाहरण 9 : $(a-2b+4c)^2$ ज्ञात कीजिए।

हल : हम $a-2b$ को एक पद मान सकते हैं और नियम I का प्रयोग कर सकते हैं। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$(a-2b+4c)^2 = (a-2b)^2 + 16c^2 + 8c(a-2b)$$

अब $(a-2b)^2$ ज्ञात करने के लिए हम नियम II का प्रयोग करते हैं जिससे हमें निम्न अंतिम परिणाम प्राप्त होता है :

$$(a-2b+4c)^2 = a^2 + 4b^2 - 4ab + 16c^2 + 8ac - 16bc$$

प्रश्नावली 10.3

निम्न गुणनफल ज्ञात कीजिए :

1. $(x+2y)^2$

2. $(3y-2)^2$

3. $(2x^2-y^2)^2$

4. $(9r+2s)^2$

5. $(5y^3+4)^2$

6. $(3m+7n^2)^2$

7. $\left(a^2 + \frac{2}{3}b\right)^2$

8. $(10p-3q)^2$

9. $\left(\frac{1}{4}m^3 + n^2\right)^2$

10. $\left(\frac{3}{2}z^2 - \frac{2}{5}y\right)^2$

11. $(xy^2-3)^2$

12. $(8w-7z)^2$

13. $(3-2x)(3+2x)$

14. $\left(\frac{1}{3}y + \frac{1}{2}x\right)\left(\frac{1}{3}y - \frac{1}{2}x\right)$

15. $\left(3\frac{a}{b} + 4\frac{x}{y}\right)\left(3\frac{a}{b} - 4\frac{x}{y}\right)$

16. $(4m-7n)(4m+7n)$

17. $(4x-5y^2)(4x+5y^2)$

18. $\left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}y\right)\left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}y\right)$

19. $(3a^2-5b^3)(3a^2+5b^3)$

20. $\left(\frac{3}{2}x^3 - y^2\right)\left(\frac{3}{2}x^3 + y^2\right)$

21. $(4b^2-3c^4)(4b^2+3c^4)$

22. $(x^2+2y)(x^2+3y)$

23. $(2y-5)(y+2)$

24. $(6x-5)(5x+7)$

*25. $\left(\frac{3}{5x} + \frac{5}{6}\right)\left(\frac{2}{3x} + \frac{4}{5}\right)$

26. $(3y^2+2z)(-2y^2+z)$

27. $(2x^2+3)(5x^2-6)$

28. $\left(\frac{1}{2} a^3-3b^2\right)(2a^3+4b^2)$

29. $[(2x-y)-2]^2$

30. $(x+2y-z)^2$

31. $(a^2-a+1)^2$

32. $(m-2n+3)^2$

33. $(3y^2-2y+1)^2$

34. $(y^2-3y+5)^2$

35. $[(x-y)+1][(x-y)-1]$

36. $(a+b+3)(a+b-3)$

37. $(1-2x+y)(1+2x-y)$

38. $(x+y+z+1)(x+y-z-1)$

39. $(2x-3y)(-2x-3y)$

40. $(2x+3y-4)(2x+3y-2)$

41. $(3z^2-2y^3+x)(3z^2-2y^3-x)$

42. $(a^2+2-a)(a^2+2+a)$

43. $(x^2+x+x^3-1)(x^2+x-x^3+1)$

44. $(3x+3y-5)(5x+5y+3)$

45. $(2y^2+c^2-2yc)(2y^2+c^2+2yc)$

विशेष गुणनफलों के नियमों का प्रयोग करते हुए निम्न में से प्रत्येक को परिकलित कीजिए :

46. $(1001)^2$

47. $(61)^2$

48. 99^2

49. $\left(\frac{51}{32}\right)^2$

50. 36^2-34^2

51. 89^2-79^2

52. $\frac{101^2-5^2}{106}$

53. 41×39

54. 31×29

55. 47×53

56. $\frac{56}{113} \left[\left(\frac{8}{7} \right)^2 - \left(\frac{7}{8} \right)^2 \right]$

57. यदि हमें $5p = 44^2 - 39^2$ दिया हुआ हो, तो ' p ' का मान ज्ञात कीजिए।

58. $958^2 - 953^2 = 15d$ दिया हुआ है। ' d ' का मान ज्ञात कीजिए।

10.4 गुणनखंडन

10.4.1 अनुच्छेद 10.3 में हमने सीखा है कि कुछ दिए हुए गुणनखंडों का गुणनफल किस प्रकार ज्ञात किया जाता है। अब हम कुछ दिए हुए गुणनफलों के गुणनखंड ज्ञात करने की समस्या पर विचार करते हैं। यह प्रक्रिया गुणनखंडन (factoring) कहलाती है। हम केवल उन्हीं बहुपदों के गुणनखंडन पर विचार करेंगे जिनके गुणांक पूर्णांक हैं। एक बहुपद पूर्णतया गुणनखंडित हुआ (completely factored) तभी माना जाता है जबकि आगे उसके गुणनखंडों में से कोई भी उससे कम घात के दो बहुपदों के गुणा के रूप में व्यक्त न किया जा सके तथा उनके गुणांकों में कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड न हो। हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : $4x^3 - 6x^2$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि बहुपद के प्रत्येक पद में एक गुणनखंड, अर्थात् $2x^2$, उभयनिष्ठ है।

अतः हम वितरणात्मक गुण का प्रयोग कर सकते हैं। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x - 3)$$

उदाहरण 2 : $x(b+c) + y(b+c)$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : पुनः हम देखते हैं कि प्रत्येक पद में $(b+c)$ एक उभयनिष्ठ गुणनखंड है। इस प्रकार,

$$x(b+c) + y(b+c) = (b+c)(x+y)$$

हम ऐसे बहुपद जिसमें एक उभयनिष्ठ गुणनखंड हो के गुणनखंडन के लिए निम्न नियम लिखते हैं :

F I : यदि बहुपद के प्रत्येक पद में एक उभयनिष्ठ गुणनखंड हो, तो हम बहुपद को दो ऐसे गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कर सकते हैं जिनमें से एक स्वयं वह उभयनिष्ठ गुणनखंड है।

10.4.2 अब हम उन बहुपदों के गुणनखंडन पर विचार करते हैं जिन्हें दो वर्गों के अंतर के रूप में लिखा जा सकता है। आइए निम्न उदाहरण पर विचार करें :
उदाहरण 3 : $9x^2 - 4$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि $9x^2 - 4$ को दो वर्गों के अंतर के रूप में निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :

$$9x^2 - 4 = (3x)^2 - (2)^2$$

अतः हम नियम III का प्रयोग कर सकते हैं और उन संख्याओं के योग और अंतर के रूप में गुणनखंड प्राप्त कर सकते हैं जिनके वर्ग किए गए हैं।

इस प्रकार, $9x^2 - 4 = (3x + 2)(3x - 2)$

हमें दो वर्गों के गुणनखंडन के लिए निम्न नियम प्राप्त होता है :

F II : $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

शब्दों में हम कहते हैं कि दो संख्याओं के वर्गों का अंतर उन संख्याओं के योग और अंतर के गुणनफल के बराबर होता है। हम कुछ और उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 4 : $16 - 25y^2$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\begin{aligned} 16 - 25y^2 &= (4)^2 - (5y)^2 \\ &= (4 + 5y)(4 - 5y) \end{aligned}$$

उदाहरण 5 : $9x^2 - (b + c)^2$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\begin{aligned} 9x^2 - (b + c)^2 &= (3x)^2 - (b + c)^2 \\ &= (3x + b + c)(3x - b - c) \end{aligned}$$

उदाहरण 6 : $4a^4 - 64b^4$ के पूर्णतया गुणनखंडन कीजिए ।

हल : हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\begin{aligned} 4a^4 - 64b^4 &= 4(a^4 - 16b^4) \\ &= 4[(a^2)^2 - (4b^2)^2] \\ &= 4(a^2 + 4b^2)(a^2 - 4b^2) \\ &= 4(a^2 + 4b^2)[(a)^2 - (2b)^2] \\ &= 4(a^2 + 4b^2)(a + 2b)(a - 2b) \end{aligned}$$

इस प्रकार,

$$4a^4 - 64b^4 = 4(a^2 + 4b^2)(a + 2b)(a - 2b)$$

10.4.3 अब हम उन त्रिपदों का गुणनखंडन करना सीखेंगे जो पूर्ण वर्ग हैं ।

आइए निम्न उदाहरण पर विचार करें ।

उदाहरण 7 : $4x^2 + 12x + 9$ के गुणनखंड कीजिए ।

हल : हमें निम्न स्थिति प्राप्त होती है :

$$4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2(2x)(3) + (3)^2$$

अर्थात्, हमारे पास एक ऐसा त्रिपद है जिसमें दो पद किन्हीं दो संख्याओं के वर्ग हैं तथा एक पद उन संख्याओं के गुणनफल का दुगुना है । अतः हम नियम I का प्रयोग कर सकते हैं और दिए हुए त्रिपद के निम्न गुणनखंड प्राप्त कर सकते हैं :

$$4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2$$

उदाहरण 8 : $25y^4 - 40y^2 + 16$ के गुणनखंड कीजिए ।

हल : पुनः हम देखते हैं कि,

$$25y^4 - 40y^2 + 16 = (5y^2)^2 - 2(5y^2)(4) + (4)^2$$

अतः हम नियम II का प्रयोग कर सकते हैं और निम्न प्राप्त कर सकते हैं :

$$25y^4 - 40y^2 + 16 = (5y^2 - 4)^2$$

अतः हमें पूर्ण वर्ग त्रिपदों के गुणनखंडन के लिए निम्न नियम प्राप्त होते हैं :

$$F \text{ III : } x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

$$F \text{ IV : } x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

[पाठक को चाहिए कि वह इन नियमों को शब्दों में लिखे ।]

हम कुछ और उदाहरण लेते हैं ।

उदाहरण 9 : $(2x - 3y)^2 - 10(2x - 3y) + 25$ के गुणनखंड कीजिए ।

हल : हम मान लेते हैं कि दिए हुए त्रिपद में, उदाहरणार्थ, $2x - 3y = z$ है । हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$z^2 - 10z + 25$$

हम देखते हैं कि यह एक पूर्ण वर्ग त्रिपद है । अतः हम F IV का प्रयोग कर सकते हैं और निम्न गुणनखंड प्राप्त कर सकते हैं :

$$z^2 - 10z + 25 = (z - 5)^2$$

z के स्थान पर $(2x - 3y)$ प्रतिस्थापित करने पर हमें दिए हुए त्रिपद के निम्न गुणनखंड प्राप्त होते हैं :

$$(2x - 3y)^2 - 10(2x - 3y) + 25 = (2x - 3y - 5)^2$$

*उदाहरण 10 : $16x^2 - 40xy + 25y^2 - 9$ के गुणनखंड कीजिए ।

हल : हम देखते हैं कि हम पहले तीन पदों का एक समूह बना सकते हैं जोकि एक पूर्ण वर्ग त्रिपद बनाते हैं । तब, F IV का प्रयोग करने पर, हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\begin{aligned} 16x^2 - 40xy + 25y^2 - 9 &= (16x^2 - 40xy + 25y^2) - 9 \\ &= (4x - 5y)^2 - 9 \end{aligned}$$

अब हमारे पास दो वर्गों का अंतर है । F II का प्रयोग करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\begin{aligned} 16x^2 - 40xy + 25y^2 - 9 &= (4x - 5y)^2 - (3)^2 \\ &= (4x - 5y + 3)(4x - 5y - 3) \end{aligned}$$

प्रश्नावली 10.4

पूर्णतया गुणनखंडन कीजिए :

1. $2x^2 - 4x^4$

2. $x^4 - 3x^3$

3. $-4y^3 + 2y$

4. $8x^3 + 5x + 3x^2$

5. $x^3 + x^2 + 3x$

6. $4(y+2) - b(y+2)$

7. $15x^4 + 10x^2 - 5x^3$

8. $2ay + y + b^2y$

9. $7x^3 - 5ax^2 - x^4$

10. $3a(1-b) + 2c(1-b)$

11. $16x^2 - 9$

12. $a^2 - 9b^2$

13. $4 - 36x^2$

14. $9a^2 - 4a^2y^2$

15. $x^4 - y^4$

16. $a^4 - 81$

17. $x^6 - 36y^4$

18. $p^2q^2x^2 - 4r^2s^2$

*19. $\frac{1}{9}x^2y^2 - \frac{9}{25}y^2z^2$

$$\left[\text{संकेत: } \frac{1}{9}x^2y^2 - \frac{9}{25}y^2z^2 = \frac{25x^2y^2 - 81y^2z^2}{225} \right]$$

*20. $\frac{4}{9}x^2 - \frac{1}{16}z^2$

21. $(3x-2y)^2 - 16z^2$

22. $4x^2 - (y+3z)^2$

23. $16a^2 - (3b-c)^2$

24. $9m^2 + 12mn + 4n^2$

25. $z^2 + 2z + 1$

26. $y^2 - 10y + 25$

27. $4a^2 - 4a + 1$

*28. $\frac{1}{4}x^2 + x + 1$

$$\left[\text{संकेत: } \frac{1}{4}x^2 + x + 1 = \frac{1}{4}(x^2 + 4x + 4) \right]$$

$$*29. \frac{1}{25}y^2 - \frac{4}{5}y + 4$$

$$30. a^4 - 4a^2b^2 + 4b^4$$

$$31. x^4 + 16y^4 - 8x^2y^2$$

$$32. 3a^2 - 18ab + 27b^2$$

$$33. 2ay^2 - 24ay + 72a$$

$$34. 25a^2 + 140ab + 196b^2$$

$$35. (m+3n)^2 - 14(m+3n) + 49$$

$$36. (5x+3y)^2 - 20x - 12y + 4$$

$$37. (a^4 - 8a^2b^2 + 16b^4) - 81$$

$$38. 49 - x^2 - 9y^2 + 6xy$$

$$39. x^2 + 8xy + 16y^2 - 9z^2$$

$$40. 4x^2 - 4y^2 + 12yz - 9z^2$$

मुख्य संकल्पनाएँ

एक एकपदी और एक बहुपद
का गुणन

द्विपद का वर्ग

दो संख्याओं के योग और

अन्तर का गुणनफल

दो वर्गों के अन्तर का गुणनखंडन

पूर्ण वर्ग त्रिपदों का गुणनखंडन

विविध प्रश्नावली III

(एकक IX और X पर)

1. निम्न संख्याओं में से प्रत्येक का आधार और घातांक लिखिए :

(i) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$

(ii) $\left(\frac{-3}{8}\right)^2$

(iii) $(5)^5$

(iv) $(19)^6$

(v) $\frac{-20}{21}$

2. निम्न में से प्रत्येक को घातांकीय संकेतन में लिखिए :

(i) $4 \times 4 \times 4 \times 4$

(ii) $\frac{6}{13} \times \frac{6}{13} \times \frac{6}{13} \times \frac{6}{13} \times \frac{6}{13} \times \frac{6}{13}$

(iii) $(-2.3) \times (-2.3) \times (-2.3) \times (-2.3) \times (-2.3)$

(iv) 59×59

(v) $\frac{3}{13}$

3. $\frac{256}{625}$ को दो विभिन्न प्रकार से घातांकीय संकेतन में लिखिए ।

4. $\frac{1}{1296}$ को दो विभिन्न प्रकार से घातांकीय संकेतन में लिखिए ।

5. $\frac{1}{64}$ को तीन विभिन्न प्रकार से घातांकीय संकेतन में लिखिए ।

6. निम्न का मान ज्ञात कीजिए :

$$(i) 4^4$$

$$(ii) \left(\frac{3}{5}\right)^3$$

7. निम्न कथनों में से कौन-कौन से कथन सत्य हैं ? सकारण उत्तर दीजिए ।

$$(i) 3^2 \times 3^3 = 3^5$$

$$(ii) \left(\frac{-2}{7}\right)^4 \times \left(\frac{-2}{7}\right) = \left(\frac{-2}{7}\right)^4$$

$$(iii) (-4)^2 \times (-4)^4 = (-4)^8$$

$$(iv) 5^8 \times 5^3 \times 5^2 = 5^{13}$$

$$(v) \left(\frac{1}{4}\right)^5 \div \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

$$(vi) 8^4 \div 8^6 = 8^2$$

$$(vii) \left(\frac{5}{11}\right)^5 \div \left(\frac{5}{11}\right)^0 = \left(\frac{5}{11}\right)^5$$

8. निम्न का मान ज्ञात कीजिए :

$$(i) 3^5 \times 3$$

$$(ii) (-6)^8 \div (-6)^5$$

$$(iii) \frac{4^3 \times 4^6}{(4^7 \times 4^6)}$$

$$(iv) \frac{(-3)^5}{(-3)^3} \div \frac{(-3)^6}{(-3)^5}$$

$$(v) \frac{25^8}{(625)^2}$$

$$(vi) \frac{9^8}{3^{17}}$$

$$(vii) (3^2)^3$$

$$(viii) \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^0$$

9. रिक्त स्थानों को भरिए :

$$(i) x^2 \times x^3 = \dots$$

$$(ii) x^2 \times \dots = x^8$$

$$(iii) x^6 \times \dots = x^6$$

$$(iv) \dots \times x^{12} = x^{20}$$

$$(v) 2y^5 \times \dots = 8y^{11}$$

$$(vi) \frac{5}{9}y^{10} \times \dots = \frac{9}{5}y^{16}$$

$$(vii) \left(\frac{3}{8}x^8\right) \times \left(\frac{8}{9}x^3\right) \times \dots = 5x^{15}$$

10. 'a' ज्ञात कीजिए ताकि

$$(-2.6)^5(-2.6)^8 = (-2.6)^{3a+1} \text{ हो।}$$

11. 'b' ज्ञात कीजिए ताकि

$$6^3 \times 6^5 \times 6^2 = 6^{5b-5} \text{ हो।}$$

12. 'a' ज्ञात कीजिए ताकि

$$7^7 \div 7^2 = 7^{a+3} \text{ हो।}$$

13. 'b' ज्ञात कीजिए ताकि

$$\frac{(2.5)^4 \times (2.5)^8}{(2.5)^6 \times 6.25} = (2.5)^{b+3} \text{ हो।}$$

14. यदि $(3^5)^a = 3^{4a+2}$ हो, तो 'a' ज्ञात कीजिए।

15. निम्न गुणनफल ज्ञात कीजिए :

$$(i) -\frac{5}{8} \left(\frac{4}{3}x^2 - \frac{8}{5}x + 2 \right)$$

$$(ii) 3x^2 \left(2x^2 - \frac{1}{3} \right)$$

$$(iii) -7y^2(3y - 6y^3 + 5 - 8y^4)$$

$$(iv) -3(6a^2 - 8a^3 + 2a - a^5)a^3$$

16. दर्शाए गए गुणन कीजिए और समान पदों को जोड़िए :

$$(i) \quad 5y^3(3y^2 - \frac{1}{5}y^3 + 3) - 2y^2(y^4 - 5y^2)$$

$$(ii) \quad x^2(2x^2 - 3x + 2) - 2x^3(2x - 3x^4) - 3(x - 2) + x^2(-x^5 - x^3)$$

$$(iii) \quad \frac{-3}{2} (4y - 6) + 8 + 3y^2(2y + 5 - 3y^2) - y(y^2 - 2 + y^3)$$

$$(iv) \quad y(-3y + 2) - 8y^3 - y^2(-3 + 2y) + 8y^3(1 - 3y) + 5$$

17. रिक्त स्थान भरिए :

$$(i) \quad (3x + 8y)^2 = 9x^2 + 64y^2 + \dots$$

$$(ii) \quad (x - 5y)^2 = x^2 - \dots + 25y^2$$

$$(iii) \quad (2z^2 - 3y^3)^2 = 4z^4 + 9y^6 - \dots$$

$$(iv) \quad (5x - 7y)(5x + 7y) = 25x^2 - \dots$$

$$(v) \quad (a^2b^2 - c^2d^2)(a^2b^2 + c^2d^2) = \dots - \dots$$

$$(vi) \quad a^2 - 9b^2 = (a + \dots)(\dots - 3b)$$

$$(vii) \quad 4x^2 - 25y^2 = (\dots + 5y)(\dots - 5y)$$

18. निम्न गुणनफल ज्ञात कीजिए :

$$(i) \quad (3y - 4z)^2$$

$$(ii) \quad (5x^2 + 6y^2)^2$$

$$(iii) \quad \left(\frac{1}{2} m^2n - m\right)^2$$

$$(iv) \quad (2x - 5)(2x + 5)$$

$$(v) \quad \left(\frac{1}{5}y^2 - z^2\right)\left(\frac{1}{5}y^2 + z^2\right)$$

$$(vi) \quad (4x - 3)(2x + 5)$$

$$(vii) \quad (5x^2 - y)(3x^2 + y)$$

$$(viii) \left(\frac{1}{3}y^3 - x^2 \right) (6y^3 + 3x^2)$$

$$(ix) (4a^2b^2 - 3ab)(2a^2b^2 + 5ab)$$

$$(x) (2x - 5y - 2)^2$$

$$(xi) (y^2 - 3y + 1)^2$$

$$(xii) [(3a + 4b) - 1]^2$$

$$(xiii) [(2a - 3b) + 2] [(2a - 3b) - 2]$$

$$(xiv) (a - 3b + 5)(a - 3b - 3)$$

$$(xv) (x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x - 3)$$

$$(xvi) (2x + 5y - 3)(2x - 5y + 3)$$

19. विशेष गुणनफलों के नियमों का प्रयोग करते हुए निम्न में से प्रत्येक को परिकलित कीजिए :

$$(i) 999^2$$

$$(ii) 81^2$$

$$(iii) 68^2 - 58^2$$

$$(iv) 198^2 - 98^2$$

$$(v) \frac{58^2 - 38^2}{96}$$

$$(vi) 67 \times 73$$

$$(vii) 38 \times 42$$

20. यदि $98^2 - 88^2 = 4p$ दिया हुआ हो तो 'p' का मान ज्ञात कीजिए ।

21. यदि $536^2 - 136^2 = 25p$ दिया हुआ हो तो 'p' का मान ज्ञात कीजिए ।

22. पूर्णतया गुणनखंडन कीजिए :

$$(i) 3x^2 + 5x + 8x^3$$

$$(ii) -5x^3 + 15x^4 + 10x^2$$

$$(iii) 7x^3 + 49x^2$$

$$(iv) 6(3y + 2z) - 3a(3y + 2z)$$

$$(v) 5x(2 - a) - 15x^2(2 - a)$$

23. पूर्णतया गुणनखंडन कीजिए :

(i) $16x^2y^2 - 25$

(ii) $25a^2b^2 - 36c^2d^2$

*(iii) $\frac{16}{25}x^2 - \frac{49}{9}y^2$

*(iv) $\frac{1}{36}x^2 - \frac{4}{9}z^2$

(v) $9x^2 - (2x + 5y)^2$

(vi) $(a^2b^2 - 9c^2d^2)^2 - 4m^2n^2$

24. पूर्ण वर्ग त्रिपदों के दो उदाहरण दीजिए ।

25. पूर्णतया गुणनखंडन कीजिए :

(i) $x^2 + 4x + 4$

(ii) $4x^2 - 20x + 25$

(iii) $9x^2 - 42x + 49$

(iv) $x^2 - 12x + 36$

(v) $2x^2y^2 + 8xy + 8$

(vi) $p^2q^2 - 2pqxy + x^2y^2$

*(vii) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{9}$

26. पूर्णतया गुणनखंडन कीजिए :

(i) $16x^4 + 48x^2y^2 + 36y^4$

(ii) $16m^4 - 72m^2 + 81$

(iii) $(2x - 5y)^2 + 6(2x - 5y) + 9$

(iv) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 4x^2y^2$

(v) $16a^2 - 9x^2 + 12xy - 4y^2$

(vi) $a^4 - 16h^4$

सूत्र और उनके उपयोग

इस एकक में हम कुछ ऐसे सूत्रों का अध्ययन करेंगे जिनका उपयोग हम गणित और संबंधित क्षेत्रों में करते हैं। सूत्रों को व्यक्त करने के लिए प्रायः बीजोय ध्यंजकों का उपयोग किया जाता है। जब संख्याओं के विभिन्न समुच्चयों (sets) में एक ही प्रकार के परिकलन बार-बार करने होते हैं, तो यह उपयोग बहुत ही लाभप्रद रहता है।

11.1 भूमिका

हम पिछली कक्षाओं में कुछ सूत्रों के विषय में पहले ही पढ़ चुके हैं तथा उनका उपयोग भी कर चुके हैं। क्या आपको, उदाहरणार्थ, निम्न के बारे में याद है ?

$$I = prt \quad (\text{साधारण व्याज के लिए सूत्र})$$

$$A = l \times b \quad (\text{आयत के क्षेत्रफल के लिए सूत्र})$$

$$F - E + V = 2 \quad (\text{सरल बहुफलक के लिए ऑयलर का सूत्र})$$

$$P = 2(l + b) \quad (\text{आयत की परिमाप के लिए सूत्र})$$

अब हम कुछ और सूत्रों और उनके उपयोगों पर विचार करते हैं।

11.2 तापमान को $^{\circ}C$ से $^{\circ}F$ में बदलना

निश्चय ही आप जानते हैं कि किसी पदार्थ का तापमान सेंटीग्रेड (Centi-grade) [अथवा सेलसियस* (Celsius)] और फारेनहाइट (Fahrenheit) में से किसी भी एक पैमाने में मापा जा सकता है। उदाहरणार्थ, पानी $0^{\circ}C$ अथवा $32^{\circ}F$ पर जमता (freeze) है। पानी का क्वथनांक (boiling point) $100^{\circ}C$ अथवा $212^{\circ}F$ है।

एक पैमाने से दूसरे पैमाने में तापमान निम्न सूत्र से बदला जा सकता है :

$$C = \frac{5}{9}(F - 32),$$

जहाँ C पदार्थ का अंश (degree) सेलसियस (अथवा सेंटीग्रेड) में तापमान है तथा F अंश फारेनहाइट में तापमान है।

[पाठक को चाहिए कि वह जाँच करे कि जब $F=32$ तो $C=0$ है। साथ ही यह कि जब $F=212$ तो $C=100$ है।]

हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : निम्न तापमानों को सेलसियस पैमाने में बदलिए :

(i) $50^{\circ}F$

(ii) $-4^{\circ}F$

हल : (i) हम सूत्र $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ में $F=50$ प्रतिस्थापित करते हैं।

हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$C = \frac{5}{9}(50 - 32) = 10$$

इस प्रकार, $50^{\circ}F = 10^{\circ}C$

*तकनीकी प्रयोग में सेंटीग्रेड शब्द की अपेक्षा सेलसियस को प्राथमिकता दी जाती है। यह पैमाना स्वीडन के एक खगोलज्ञ एन्डर्स सेलसियस (1701-1744) ने निकाला था और इसलिए इसका नाम सेलसियस पड़ा।

(ii) हम सूत्र $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ में $F = -4$ प्रतिस्थापित करते हैं, हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$C = \frac{5}{9}(-4 - 32) = -20$$

इस प्रकार, $-4^\circ F = -20^\circ C$

उदाहरण 2 : निम्न तापमानों को फारेनहाइट पैमाने में बदलिए :

(i) $40^\circ C$

(ii) $-20^\circ C$

हल : (i) हम सूत्र $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ में $C = 40$ प्रतिस्थापित करते हैं।

हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$40 = \frac{5}{9}(F - 32) \quad (1)$$

हमें F के लिए (1) को हल करने की आवश्यकता है। (1) के दोनों पक्षों को $\frac{9}{5}$ से गुणा करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$72 = F - 32$$

जिससे, $F = 104$

इस प्रकार, $40^\circ C = 104^\circ F$

(ii) उपर्युक्त विधि का अनुसरण करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$-20 = \frac{5}{9}(F - 32)$$

इस प्रकार, $-36 = F - 32$

जिससे, $F = -4$

इस प्रकार, $-20^\circ C = -4^\circ F$

उदाहरण 3 : एक 'स्वस्थ' व्यक्ति का 'सामान्य' (normal) तापमान $98.4^{\circ}F$ होता है। इसे सेलसियस पैमाने में व्यक्त कीजिए।

हल : हमें $F=98.4$ दिया हुआ है। सूत्र में प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$C = \frac{5}{9}(98.4 - 32) = \frac{332}{9} \\ = 36.9 \text{ (लगभग)}$$

इस प्रकार, $98.4^{\circ}F = 36.9^{\circ}C$ (लगभग)

प्रश्नावली 11.1

1. निम्न तापमानों को सेलसियस पैमाने में बदलिए :

- | | | |
|---------------------|---------------------|----------------------|
| (i) $25^{\circ}F$ | (ii) $32^{\circ}F$ | (iii) $-40^{\circ}F$ |
| (iv) $36^{\circ}F$ | (v) $75^{\circ}F$ | (vi) $212^{\circ}F$ |
| (vii) $59^{\circ}F$ | (viii) $0^{\circ}F$ | |

2. निम्न तापमानों को फारेनहाइट पैमाने में बदलिए :

- | | | |
|--------------------|---------------------|---------------------|
| (i) $36^{\circ}C$ | (ii) $-10^{\circ}C$ | (iii) $30^{\circ}C$ |
| (iv) $32^{\circ}C$ | (v) $-75^{\circ}C$ | (vi) $-4^{\circ}C$ |

11.3 एक स्थिर चाल से गतिमान वस्तु द्वारा तय की गई दूरी

एक बस 40 किलोमीटर प्रति घंटे की एक स्थिर चाल से चल रही है। वह, उदाहरणार्थ, 2 घंटे में कितनी दूरी तय करेगी ? स्पष्ट है कि वह $80 (= 40 \times 2)$ किलोमीटर की दूरी तय करेगी। वह, उदाहरणार्थ, $3\frac{1}{2}$ घंटे में कितनी दूरी तय करेगी ? स्पष्ट है, वह $140 (= 40 \times \frac{7}{2})$ किलो-

मीटर की दूरी तय करेगी। इसका तात्पर्य यह हुआ कि

यदि एक वस्तु v कि० मी०/घंटा की एक स्थिर चाल से चल रही है तो, उदाहरणार्थ, t घंटे में उसके द्वारा किलोमीटरों में चली दूरी s निम्न होती है :

$$s = vt$$

हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : एक साइकिल सवार 200 मी०/मिनट की एक स्थिर चाल से चल रहा है। वह 1 घंटे में कितनी दूरी चलेगा ?

हल : यहाँ $v = 200$ मी०/मिनट तथा $t = 60$ मिनट है।

$$\begin{aligned} \text{इस प्रकार, } s &= 200 \times 60 = 12000 \text{ मी०} \\ &= 12 \text{ किलोमीटर} \end{aligned}$$

अतः साइकिल सवार 1 घंटे में 12 किलोमीटर की दूरी चलता है।

उदाहरण 2 : एक बस 2 घंटे 30 मिनट में 90 कि० मी० चलती है। यह मानते हुए कि बस एक स्थिर चाल से चल रही है, उसकी चाल ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $s = 90$ कि० मी० तथा $t = \frac{5}{2}$ घंटे है।

$$\text{इस प्रकार, } 90 = \frac{5}{2} v.$$

$$\text{जिससे, } v = 36$$

अतः बस 36 कि० मी०/घंटे की स्थिर चाल से चल रही है।

प्रश्नावली 11.2

1. एक कीड़ा, एक स्थिर चाल से, 1.5 मीटर की दूरी 2 घंटे और 30 मिनट में रेंगता है। कीड़े की चाल निर्धारित कीजिए।
2. एक साइकिल सवार 15 कि० मी०/घंटे की एक स्थिर चाल से चल रहा है। वह 65 किलोमीटर चलने में कितना समय लेगा ?

3. एक रेलगाड़ी 68 कि० मी० /घंटे की एक स्थिर चाल से चल रही है। वह 3 घंटे और 15 मिनट में कितनी दूरी तय करेगी ?
4. निम्न में से प्रत्येक में दर्शाई गई राशि ज्ञात करने के लिए सूत्र $s=vt$ का प्रयोग कीजिए :
 - (i) $v=40$ मी०/सैकेंड, $t=10$ मिनट; $s=?$
 - (ii) $s=315$ कि० मी०, $v=60$ कि० मी०/घंटा; $t=?$
 - (iii) $v=5280$ कि० मी०/घंटा, $s=33 \times 10^4$ कि० मी०; $t=?$
 - (iv) $s=72.9$ मी०, $t=3$ घंटे 20 मिनट; $v=?$
 - (v) $s=225$ कि० मी०, $t=45$ मिनट; $v=?$

11.4 कुछ और सूत्र

नीचे प्रश्नावली 11.3 में हम कुछ और सूत्रों तथा उनके उपयोगों पर विचार कर रहे हैं।

प्रश्नावली 11.3

1. किसी वर्ग की परिमाप P निम्न सूत्र से प्राप्त होती है :

$$P=4l$$

जहाँ l वर्ग की एक भुजा है। P और l दोनों एक ही मात्रकों में मापे जाते हैं।

- (क) उस वर्ग की परिमाप ज्ञात कीजिए जिसकी भुजा 32 मीटर है।
- (ख) 2.60 रु० प्रति मीटर की दर से 112 मीटर की भुजा के एक वर्गाकार खेत के चारों ओर तार लगाने का व्यय ज्ञात कीजिए।

2. आप घन (cubes) और घनाभों (cuboids) से पहले से ही परिचित हैं। आप, अगली कक्षाओं में, पढ़ेंगे कि इनके आयतन (volumes) किस प्रकार ज्ञात किए जाते हैं। यहाँ हम केवल वांछित सूत्र ही दे रहे हैं।
घनाभ का आयतन V निम्न सूत्र से प्राप्त होता है :

$$V = lbh$$

जहाँ l , b और h क्रमशः घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई हैं।

- (क) उस घनाभ का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 4 सें० मी०, 2 सें० मी० और 3 सें० मी० हैं।
- (ख) उस घनाभ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसका आयतन 19.5 घन सेंटीमीटर है तथा जिसकी लम्बाई और चौड़ाई क्रमशः 12 सें० मी० और 6.5 सें० मी० हैं।
- (ग) घन में लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई बराबर होती हैं। उस घन का आयतन ज्ञात कीजिए जिसका एक किनारा (edge) 4 सें० मी० है।
3. अब हम उस त्रिभुज के क्षेत्रफल A के लिए सूत्र लिख रहे हैं जिसका आधार b तथा ऊँचाई h है। यह क्षेत्रफल निम्न होता है :

$$A = \frac{1}{2}bh$$

- (क) उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका आधार 5 सें० मी० है तथा ऊँचाई 12 सें० मी० है।
- (ख) एक त्रिभुजाकार खेत का आधार 120 मीटर है तथा ऊँचाई 136 मीटर। 32 पैसे प्रति वर्ग मीटर की दर से खेत पर छिड़काव लगाने का व्यय ज्ञात कीजिए।
- (ग) यदि $A = 509.6$ वर्ग मीटर, $b = 56$ मीटर हो, तो h ज्ञात कीजिए।

4. किसी संख्या, उदाहरणार्थ, $x + \frac{1}{2}$ का वर्ग मस्तिष्क में ही निम्न सूत्र का प्रयोग करके ज्ञात किया जा सकता है :

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x(x+1) + \frac{1}{4}$$

उदाहरणार्थ, $\left(4 + \frac{1}{2}\right)^2 = (4 \times 5) + \frac{1}{4} = 20.25$

उपर्युक्त सूत्र का प्रयोग करते हुए, निम्न को ज्ञात कीजिए :

(क) $(9.5)^2$

(ख) $(11.5)^2$

(ग) $(75)^2$

(घ) $(24.5)^2$

5. हम अगली कक्षाओं में सिद्ध करेंगे कि प्रथम n घनपूर्णांकों के योग S के लिए सूत्र

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

होता है। उदाहरणार्थ, $1+2+3+4 = \frac{4(5)}{2} = 10$

इसी प्रकार, $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = \frac{10(11)}{2} = 55$

इस सूत्र का निम्न को ज्ञात करने में प्रयोग कीजिए :

(क) प्रथम 20 घनपूर्णांकों का योग। वास्तविक जोड़ से जाँच भी कीजिए।

(ख) प्रथम 100 घनपूर्णांकों का योग।

6. उस वृत्त का क्षेत्रफल A जिसकी त्रिज्या r है निम्न सूत्र से प्राप्त होता है :

$$A = \pi r^2,$$

जहाँ हम π का मान $\frac{22}{7}$ लेते हैं।

(क) उस वृत्ताकार खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 9.8 मीटर है।

(ख) उस वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका व्यास 14 सें० मी० है।

7. उस वृत्त की परिधि C जिसकी त्रिज्या r है निम्न सूत्र से प्राप्त होती है :

$$C = 2\pi r,$$

जहाँ, पुनः, हम π का मान $\frac{22}{7}$ लेते हैं।

(क) उस वृत्त की परिधि ज्ञात कीजिए जिसका व्यास 14 सें० मी० है।

(ख) उस वृत्ताकार खेत की परिधि ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 9.8 मीटर है। 3 20 रु० प्रति मीटर की दर से खेत पर बाड़ लगाने का व्यय भी ज्ञात कीजिए।

(ग) 1980 मीटर की दूरी दौड़ने के लिए किसी व्यक्ति को 42 मीटर व्यास वाले एक वृत्ताकार मैदान के कितने चक्कर लगाने पड़ेंगे ?

*परिशिष्ट I

दो (भिन्न) परिमेय संख्याओं के बीच में हम सदैव एक अन्य परिमेय संख्या ज्ञात कर सकते हैं।

मान लीजिए $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ कोई दो (भिन्न) परिमेय संख्याएँ हैं। चूँकि हमें परिमेय संख्याओं की तुलना करनी पड़ेगी इसलिए आइए यह मान लें कि हर धनात्मक हैं। अर्थात् $b > 0$ और $d > 0$ है।

चूँकि ये भिन्न (अर्थात् असमान) हैं, अतः इनमें से एक, दूसरे से बड़ा होना चाहिए। मान लीजिए कि $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ (अर्थात् $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$) है।

आइए संख्या $\frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{2}$ अर्थात् $\frac{ad+bc}{2bd}$ पर विचार करें जो कि दो हुई

संख्याओं का औसत (average) है। हम सिद्ध करना चाहते हैं कि

$$\frac{c}{d} < \frac{ad+bc}{2bd} \text{ और } \frac{ad+bc}{2bd} < \frac{a}{b}$$

हम देखते हैं कि $\frac{c}{d} = \frac{2bc}{2bd}$

इस प्रकार $\frac{c}{d}$, $\frac{ad+bc}{2bd}$ से कम तभी होगा जबकि

$$2bc < ad+bc \text{ हो। (क्यों?)}$$

क्या $2bc < ad+bc$ है?

प्रत्येक पक्ष में से bc घटाइए। हमें $bc < ad$ प्राप्त होता है जो कि, निस्संदेह, सत्य है क्योंकि हमने यह मानकर प्रारम्भ किया है कि $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$ । इस प्रकार, हमने दिखा दिया है कि $\frac{c}{d} < \frac{ad+bc}{2bd}$ । इसी प्रकार, हम दिखा सकते हैं कि $\frac{ad+bc}{2bd} < \frac{a}{b}$ ।

इस प्रकार, हमने दी हुई दो (भिन्न) परिमेय संख्याओं के बीच में एक परिमेय संख्या $\frac{ad+bc}{2bd}$ (अर्थात् दी हुई परिमेय संख्याओं का औसत) ज्ञात कर ली है।

उत्तरमाला

प्रश्नावली 1.1

1. (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{3}{5}$ (iii) $\frac{4}{7}$ (iv) $\frac{2}{9}$ (v) $\frac{11}{60}$;
2. (i) चार पचाश (ii) नौ दशांश (iii) तीन सातांश
(iv) सोलह सत्रहवांश ; 3. (i) $\frac{1}{60}$ (ii) $\frac{1}{1000}$ (iii) $\frac{1}{1000}$
(iv) $\frac{1}{20}$ (v) $\frac{1}{100}$; 4. (i) 2, 3 (ii) 101, 10 (iii) 56, 87 (iv) -5, 7
(v) 8, 1 ; 5. 272 ; 6. $\frac{9999}{100}$; 7. $\frac{5}{2}$ स० ; 8. $\frac{5025}{2}$ स० ;
9. $\frac{25}{2}$

प्रश्नावली 2.1

1. (i), (ii) और (v) ; 3. $-\frac{5}{3}$, $\frac{22}{10}$, $\frac{729}{27}$; 4. $\frac{7}{4}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{8}{3}$,
 $\frac{109}{292}$, $\frac{11}{17}$

प्रश्नावली 2.2

1. (i) घनात्मक, दाईं (ii) ऋणात्मक, बाईं (iii) ऋणात्मक, बाईं
(iv) ऋणात्मक, बाईं (v) घनात्मक, दाईं

प्रश्नावली 2.3

2. (i) $\frac{11}{2}$ (ii) $\frac{-186}{13}$ (iii) $\frac{-1139}{131}$ (iv) $\frac{-40008}{149}$ (v) $\frac{17}{3}$
 (vi) $\frac{355}{29}$ (vii) $\frac{-20444}{1001}$; 3. (i) $\frac{29}{170}$ (ii) $\frac{77}{144}$ (iii) $\frac{34}{171}$
 (iv) $\frac{-173}{72}$ (v) $\frac{37}{5}$ (vi) $\frac{13}{2}$ (vii) $\frac{-73}{81}$ (viii) $\frac{-395}{77}$ (ix) $\frac{-569}{80}$
 (x) $\frac{50054}{6461}$; 4. (i) $\frac{131}{78}$ (ii) $\frac{69}{143}$ (iii) $\frac{5}{6}$ (iv) $\frac{97}{60}$ (v) $\frac{796}{385}$
 (vi) $\frac{137}{26}$ (vii) $\frac{47}{5}$ (viii) $\frac{1313}{120}$ (ix) $\frac{191}{44}$ (x) $\frac{29}{6}$; 5. $\frac{137}{60}$;
 6. $\frac{3}{4}$

प्रश्नावली 2.4

1. (i) $-\frac{2}{7}$ (ii) $\frac{3}{7}$ (iii) $\frac{3}{7}$ (iv) $-\frac{2}{3}$ (v) $\frac{5}{4}$;
 2. (i) $-\frac{62}{63}$ (ii) $-\frac{289}{420}$ (iii) $-\frac{113}{10}$ (iv) $\frac{82}{17}$ (v) $\frac{129}{143}$
 (vi) 0 (vii) $\frac{5}{6}$ (viii) $-\frac{3}{8}$ (ix) $\frac{2388}{121}$ (x) $\frac{175}{13}$; 3. (i) $\frac{7}{12}$
 (ii) $-\frac{479}{234}$ (iii) $\frac{8}{21}$ (iv) $\frac{6547}{7130}$; 4. $-\frac{62}{117}$, $\frac{62}{117}$, नहीं;
 5. $\frac{949}{770}$, $-\frac{151}{770}$, नहीं; 6. $\frac{220}{441}$; 7. $\frac{1}{4}$

प्रश्नावली 3.1

1. (i) $\frac{21}{16}$ (ii) $-\frac{319}{30}$ (iii) $-\frac{590}{57}$ (iv) 0 (v) 0 (vi) $\frac{730}{111}$ (vii) $-\frac{730}{111}$;
 2. (i) $-\frac{27}{77}$ (ii) $\frac{19}{16}$ (iii) $\frac{8576}{10849}$ (iv) 1 (v) -1 (vi) $\frac{39512}{40501}$
 (vii) 75 ; 4. (i) $-\frac{23}{47}$ (ii) $\frac{18}{31}$; 5. (i) $\frac{5}{12}$ (ii) $-\frac{17}{13}$
 (iii) $-\frac{1}{18}$ (iv) $-\frac{1377}{275}$ (v) $\frac{252}{337}$ (vi) $\frac{2000}{297}$ (vii) $\frac{288}{55}$
 (viii) 0 ; 7. (i) $\frac{cf+ed}{df}$ (ii) $\frac{acf+aed}{bdf}$ (iii) $\frac{ac}{bd}$, $\frac{ae}{bf}$;
 8. $-\frac{989}{11340}$; 9. 30 ; 10. $-\frac{705}{8}$ क्विंटल

प्रश्नावली 3.2

1. (i) $\frac{7}{5}$ (ii) $-\frac{7}{5}$ (iii) $-\frac{12}{11}$ (iv) 1 (v) -1 ; 2. (i) 1 (ii) 1
 (iii) 1 (iv) 1 (v) 1 ; 3. $-\frac{9}{68}$; 4. $-\frac{48}{35}$

प्रश्नावली 3.3

1. (i) $\frac{11}{21}$ (ii) $\frac{16}{81}$ (iii) $-\frac{66}{65}$ (iv) -1 (v) $\frac{49}{288}$ (vi) 15 (vii) $\frac{192}{427}$
 (viii) $-\frac{21}{5}$ (ix) $\frac{1224}{103}$; 3. (i) $\frac{21}{22}$ (ii) $-\frac{374}{81}$ (iii) $\frac{48}{245}$ (iv) $-\frac{3}{8}$;
 4. $\frac{253}{1231}$, $\frac{161}{11}$; 5. $\frac{7}{5}$, $\frac{7}{20}$, नहीं

प्रश्नावली 3.4

1. (i) $\frac{3}{11}$ (ii) $\frac{-5}{8}$ (iii) $\frac{7}{25}$ (iv) 0 (v) $\frac{120}{110}$ (vi) $\frac{-8}{7}$; 2. $\frac{5}{2}$, $\frac{11}{10}$, $\frac{-10}{9}$, $\frac{-8}{7}$, $\frac{8}{-3}$; 3. $\frac{9}{-5}$, $\frac{-5}{4}$, $\frac{-6}{5}$, $\frac{-7}{6}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{8}{11}$;
4. $\frac{18}{39}$, $\frac{233}{457}$, $\frac{131}{202}$, 0, $\frac{162}{961}$

प्रश्नावली 3.5

4. हाँ

विविध प्रश्नावली I

(एकक I, II और III पर)

1. (i), (iii), (v), (vi), (vii) और (ix) ; 2. 613 ; 4. (i) $\frac{21}{10}$ (ii) $\frac{45}{68}$
(iii) $\frac{-11}{4}$ (iv) -4 ; 6. (i) $\frac{290}{143}$ (ii) $\frac{241}{20}$ (iii) $\frac{-355}{42}$ (iv) $\frac{17}{600}$
(v) $\frac{1024}{85}$ (vi) $\frac{65}{36}$; 7. (i) $\frac{14}{11}$ (ii) $-\frac{353}{5}$ (iii) $\frac{9}{16}$ (iv) $\frac{11}{210}$
(v) $\frac{479}{210}$ (vi) $\frac{1343}{210}$; 8. (i) $-\frac{312}{95}$ (ii) -7 (iii) $\frac{1}{5}$; 9. $\frac{11}{3}$;
10. $-\frac{74}{129}$; 11. (i) $-\frac{8}{5}$ (ii) $\frac{288}{95}$ (iii) $\frac{575}{49}$ (iv) $\frac{12320}{81}$

- (v) $-\frac{203553}{25}$ (vi) 0; 13. $\frac{13}{115}$; 14. (i) $\frac{7}{30}$ (ii) $\frac{1}{3}$ (iii) $\frac{16}{5}$ (iv) $\frac{91}{101}$ (v) 0;
 15. $-\frac{7}{4}$; 16. $\frac{7}{2}$; 17. (i) $\frac{1156}{49}$ (ii) $-\frac{1}{12}$ (iii) -91 (iv) $\frac{1}{5}$ (v) -33750 ;
 18. (i) $\frac{7}{8}$ (ii) $\frac{19}{20}$ (iii) $-\frac{15}{16}$ (iv) $-\frac{117}{108}$; 19. (i) $>$ (ii) $<$ (iii) $>$ (iv) $=$;
 20. $-\frac{5}{2}$, $-\frac{7}{4}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{5}$; 21. $\frac{17}{4}$, $\frac{25}{6}$, 3, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{18}$, $\frac{-17}{33}$, $\frac{-28}{44}$;
 22. $\frac{19}{11}$, $\frac{19}{11}$, $\frac{19}{11}$, $\frac{19}{11}$; 23. 9; 27. 1, 3; 28. -3 , -1 , 1, 3

प्रश्नावली 4.1

1. (i) $3 \times 1 + \frac{5}{10}$ (ii) $2 \times 10 + 8 \times 1 + \frac{3}{10} + \frac{7}{10^2}$ (iii) $2 \times 10^2 + 1 \times 10 + 5 \times 1 + \frac{5}{10}$
 $+ \frac{3}{10^2} + \frac{2}{10^3}$ (iv) $1 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 1 \times 1 + \frac{1}{10^2} + \frac{3}{10^3}$ (v) $2 \times 10^3 + 3 \times 10^2$
 $+ 9 \times 10 + 5 \times 1 + \frac{2}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{7}{10^4}$ (vi) $9 \times 10^2 + 9 \times 10 + 9 \times 1 + \frac{9}{10} +$
 $\frac{9}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{9}{10^4}$; 2. (i) $\frac{356}{5}$ (ii) $\frac{477}{25}$ (iii) $\frac{28251}{250}$ (iv) $\frac{37}{10000}$ (v) $\frac{611272}{625}$;
 3. (i) 18.892, 18.8922, 19.05, 19.3 (ii) 0.09, 0.099, 0.1, 0.937, 1.001 (iii) 5.002,
 5.02, 5.119, 5.19, 5.2, 5.219; 4. (i) 1.01, 1.001, 0.10, 0.01, 0.001 (ii) 1103.01,
 1103.001, 999.099, 110.3001 (iii) 23.9255, 23.925, 23.9249, 23.92249, 22.9925;
 5. (i) 9.678 (ii) 16.874 (iii) 463.82032 (iv) 12656.27611 (v) 10285.79659;
 6. (i) -0.2966 (ii) -4.69193 (iii) -254.6988 (iv) -229.72419

(v) 297.085804; 7. (i) 0.75 (ii) 8.6 (iii) 6.15 (iv) 50.625 (v) 0.1 (vi) 0.01 (vii) 0.005 (viii) 875.25; 8. (i) 12.8 (ii) —35.15 (iii) 5.0424 (iv) 95 (v) 6736.61232 (vi) 284160.9375 (vii) 0.000003033792; 10. (i) 4.51 (ii) 36.15 (iii) 2000.1 (iv) 0.005 (v) 105000 (vi) 1460.25 (vii) 7.28; 12. (i) 24.596 (ii) 24.596 (iii) 24.596 (iv) 245.96 (v) —0.063 (vi) 2.1826 (vii) 0.23071 (viii) 9.2144 (ix) 2873.5875 (x) —70; 13. 1.234; 14. (i) 4195.714 (ii) 9.406 (iii) 3.519 (iv) 5890; 15. 6.15 द०; 16. 0.105 कि०घा०; 17. 5.10 द०; 18. 44 कि०मी०; 19. 580.30 द०; 20. 72.40 द०; 21. 1.05 कि०टन, 5.25 कि०टन; 22. 32.81 मीटर

प्रश्नावली 5.1

1. (i) 0.2, सांत; (ii) 0.24, सांत; (iii) $0.8\overline{3}$, असांत आवर्ती; (iv) 0.65, सांत; (v) 2.56875, सांत; (vi) 34.625, सांत; (vii) 5.24, सांत; (viii) 10.65, सांत; (ix) $64.\overline{63}$, असांत आवर्ती; (x) $40.\overline{384615}$, असांत आवर्ती; (xi) $0.\overline{714285}$, असांत आवर्ती; (xii) $0.\overline{7}$, असांत आवर्ती

प्रश्नावली 5.2

1. (i) 0.65 (ii) 1.125 (iii) 0.09375; 2. (i) 0.0209 (ii) 0.4938 (iii) 3.2666

प्रश्नावली 5.3

1. (i) सांत (ii) सांत (iii) सांत (iv) असांत आवर्ती (v) असांत आवर्ती (vi) असांत आवर्ती (vii) असांत आवर्ती; 2. (i) —0.24375 (ii) —3.0546875 (iii) —1.756 (iv) —0.863

प्रश्नावली 6.1

1. (i), (ii), (v) और (vi); 2. (i) 1 (ii) 3 (iii) 50 (iv) 7 (v) 0 (vi) 5 (vii) n ; 3. $1.2, \frac{1}{3}x^2, -3x^7, 5x^{10}, \frac{2}{9}x^{11}, 3.7x^{15}$; 4. $1.6y^{16}, \frac{6}{11}y^9, 7y^8, -8y^5, 2.3y^3, -43$; 5. (i) $3, 5-7y+\frac{3}{8}y^3$ (ii) $5, 8-\frac{5}{4}x^3+9x^5$ (iii) $4, -7x+\frac{2}{3}x^2+\frac{3}{2}x^4$ (iv) $3, -4+5x+\frac{4}{5}x^3$ (v) $7, -20.5+3.2x-8x^2+12x^7$ (vi) $10, 50-\frac{7}{8}x^3+\frac{5}{3}x^6+\frac{3}{2}x^8-16x^9-5x^{10}$; 8. (i) 0 (ii) 1 (iii) 2 (iv) 3 (v) 4

प्रश्नावली 6.2

1. (i) $x+3x^2$ (ii) $7-\frac{14}{3}x^2+7x^3$ (iii) $-4-\frac{1}{3}x-x^2$ (iv) $-7+0.4x+0.7x^2+3.3x^3$ (v) $2-12x-4x^2+8x^4$ (vi) $15+2x^2+x^3$ (vii) $-\frac{1}{2}+\frac{7}{8}x+\frac{4}{5}x^2+\frac{5}{6}x^3+\frac{1}{2}x^4+x^5$ (viii) $\frac{163}{24}-\frac{13}{12}x+\frac{17}{2}x^2+\frac{1}{5}x^3$; 2. (i) $-16+2x^2-8x^3$ (ii) $-10+4x+5x^2-x^3-\frac{5}{4}x^4$ (iii) $35-x^2+x^3$ (iv) $15-12x+6x^2-x^3$ (v) $-\frac{8}{5}+\frac{28}{5}x+12x^2$; 3. (i) $13+5x+5.6x^2-\frac{29}{4}x^3$ (ii) $3-x-\frac{1}{5}x^2+7x^5$ (iii) $7+\frac{13}{3}x+\frac{7}{2}x^3+6x^4$ (iv) $\frac{11}{6}+x+\frac{5}{6}x^3+\frac{5}{3}x^4$

(v) $6 + \frac{19}{2}x^2 - x^3 + 5x^4 + 3x^5$; 4. (i) $-\frac{2}{3}x^3 + \frac{14}{3}x^4 - \frac{13}{8}x^5$
(ii) $7 + \frac{7}{6}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{20}x^5$ (iii) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$
 $+ x^5 + x^6$ (iv) $1 - a^2 + 2a^4$ (v) $-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + 4x^2 - 5x^4$ (vi) $10 + 2x$
 $- 21x^2 - 2x^3$ (vii) $16 + 14x^2 + 2x^3 - 7x^4 + 10x^5$;
5. $\frac{5}{2} - \frac{3}{4}x + \frac{1}{5}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{5}{4}x^5 + \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{6}x^7$;
6. $-8 - 34x + \frac{45}{2}x^2 + 5x^3$; 7. (i) 0 (ii) $\frac{5}{6} + \frac{5}{3}x + 10x^2$
 $+ \frac{4}{5}x^3$ (iii) $-\frac{5}{12} - \frac{5}{6}x - 5x^2 - \frac{2}{5}x^3$; 8. (i) $\frac{1}{3}x^6 + \frac{7}{2}x^5$
 $- \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x$ (ii) $\frac{1}{3}x^6 + \frac{7}{2}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^3$
 $+ \frac{3}{2}x^2 + 2x$ (iii) $\frac{10}{21}x^6 + \frac{7}{2}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2$
 $+ 2x - 4$ (iv) $\frac{10}{21}x^6 + \frac{7}{2}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + 2x - 4$;
9. (i) $8x^4 - \frac{7}{2}x^3 + 5x^2 - 2x + 2$ (ii) $21x^4 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$
 $+ \frac{15}{2}$ (iii) $19x^4 + \frac{3}{4}x^3 + \frac{19}{2}x^2 - 17x - 6$ (iv) $-\frac{5}{2}x^4$
 $- 2x^3 + 4x^2 - \frac{7}{2}x - 2$; 10. $9 - 5x + \frac{29}{2}x^2 - 6x^3 + 4x^4$;
11. $-\frac{3}{7}x^5 - \frac{2}{3}x^4 - x^3 + 5x$; 12. $-2x^4 - 4x^3 - \frac{14}{5}x^2 + 3x$
 $+ \frac{11}{2}$

प्रश्नावली 6.3

1. (i) 0, -80, -80, $-\frac{5}{16}$ (ii) -1, -1, 17 (iii) $-\frac{13}{7}$
 (iv) $-\frac{1}{2}$, $\frac{13}{10}$, -19 (v) $-\frac{3}{16}$, $\frac{57}{20}$; 2. (i) $-\frac{23}{6}$,
 $\frac{19}{6}$ (ii) $-\frac{1}{4}$ (iii) -41 (iv) -1, 0, 0 (v) 0, $\frac{33}{32}$ (vi) 835, 1,
 $\frac{19}{7}$; 3. 55; 4. (i) 4 (ii) $\frac{7}{2}$ (iii) $\frac{13}{16}$ (iv) 0 (v) $\frac{11}{12}$;
 5. 44.1, 122.5, 313.6, 1960

प्रश्नावली 7.1

1. $-\frac{9}{2}$; 2. 3; 3. $-\frac{51}{7}$; 4. $-\frac{7}{3}$; 5. $-\frac{11}{5}$; 6. $\frac{42}{31}$;
 7. $-\frac{34}{35}$; 8. $-\frac{184}{13}$; 9. -2; 10. $-\frac{144}{5}$; 11. 12; 12. $\frac{9}{8}$;
 13. 5; 14. $-\frac{9}{8}$; 15. $-\frac{29}{19}$; 16. $\frac{45}{4}$; 17. $\frac{1}{8}$; 18. -2;
 19. 9; 20. 21; 21. $\frac{1}{27}$; 22. $-\frac{5}{21}$; 23. $\frac{21}{50}$; 24. $-\frac{13}{15}$;
 25. $\frac{2}{3}$; 26. 11; 27. 5

प्रश्नावली 7.2

1. 25; 2. 8.90 रु०; 3. 4; 4. 90° , 40° , 50° ; 5. 6 सें०मी०, 8 सें०मी०,
 8 सें०मी०; 6. 76800 रु०; 7. $\frac{2}{9}$; 8. 210 रु० 3% पर, 5390 रु०
 50% पर; 9. 60 रु०, 50 रु०, 40 रु०; 10. 2.1 कि०मी०, 3.6 कि०मी०/घंटा,
 4.2 कि०मी०/घंटा

प्रश्नावली 7.3

1. (i) $\frac{139}{50}$ (ii) $\frac{53}{400}$ (iii) $\frac{67723}{2500}$ (iv) $\frac{10101}{1000}$ (v) $\frac{1}{40000}$

(vi) $\frac{92091}{1000}$ (vii) $\frac{50035003}{10000}$; 2. (i) $\frac{25}{3}$ (ii) $\frac{38}{3}$
 (iii) $\frac{1}{90}$ (iv) $\frac{560}{99}$ (v) $\frac{36}{11}$ (vi) $\frac{986}{33}$ (vii) $\frac{26}{495}$ (viii) $\frac{3}{1100}$
 (ix) $\frac{20081}{9990}$

प्रश्नावली 8.1

2. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) असत्य (iv) सत्य ; 5. (i) सत्य
 (ii) असत्य (iii) असत्य (iv) असत्य (v) सत्य ; 6. सत्य

प्रश्नावली 8.2

1. (क) नहीं (ख) हाँ ; 2. (क) और (ख) ; 4. 0, 1, 2, 3, 4, 5 ;
 5. (i) $x \leq 2$ (ii) $y > 4$ (iii) $y \geq -2$ (iv) $x \geq \frac{18}{11}$ (v) $y < -\frac{1}{2}$
 (vi) $x \geq -\frac{10}{3}$ (vii) $z > 1$ (viii) $x \leq -3$; 6. नहीं ;
 7. (i) $y > \frac{21}{5}$ (ii) $x > 3$ (iii) $y \geq 6$ (iv) $x > 10$ (v) $y \leq \frac{1}{2}$
 (vi) $y > 5$ (vii) $x < 1$; 8. 0, 1, 2, 3

विविध प्रश्नावली II

(एकक V, VI, VII और VIII पर)

1. (i) 0.1875 (ii) -0.144 (iii) -2.142857 (iv) 0.440625 (v) 0.416
 (vi) -0.140625 ; 4. (i) 0.12 (ii) 0.6875 (iii) 0.175 ; 5. (i) 0.02884
 (ii) -0.08482 (iii) 1.05666 ; 6. (i), (ii), (v) और (vi) ; 7. (i) 0 (ii) 3
 (iii) 100 (iv) 1 (v) 19 (vi) 5 ; 9. $-26, \frac{7}{2}x^3, 23x^4, \frac{9}{7}x^5, 0.8x^8$;
 10. $-5y^{15}, \frac{12}{11}y^7, -\frac{16}{13}y^6, \frac{43}{21}y^2, 32$; 11. (i) $3, -\frac{5}{8}y^3$
 $+3y^2+5$ (ii) $5, -\frac{2}{7}y^5-6y^4+y^2+\frac{13}{2}$ (iii) $5, 3.8x^5-2.5x^3$

- $-23x^3$ (iv) 8, $-25x^3$, $-\frac{5}{18}x^5 + \frac{16}{9}x^3 + \frac{3}{5}x^2 + 16$; 12. (i) $8 + \frac{21}{2}y$
 $-2y^3 - \frac{3}{2}y^4$ (ii) $2x^5$ (iii) 10 (iv) $14 - 13x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{23}{2}x^3$ (v) $-\frac{19}{6}$
 $+23x - x^2 + 3x^4$ (vi) $9 + \frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{8}x^4$; 13. (i) $\frac{7}{6} - \frac{31}{4}x + \frac{3}{2}x^2$
 $+ \frac{5}{2}x^3$ (ii) $-11 + \frac{13}{3}x^2 + x^3 + \frac{5}{9}x^4$ (iii) $2 - 2x + x^2 + \frac{10}{13}x^3$
(iv) $-7 - x^2 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{7}{5}x^5$ (v) $3 - 2x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{8}{5}x^4 - \frac{9}{4}x^5$
14. (i) $-5 + 3x - x^2 + \frac{17}{11}x^3$ (ii) $8x + 7x^2 - \frac{1}{9}x^3 + 8x^4$ (iii) $7 +$
 $\frac{13}{3}x + \frac{2}{13}x^2 + \frac{9}{13}x^3 + \frac{1}{19}x^5$ (iv) $\frac{11}{2} + 2x + \frac{7}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + x^4$
(v) $\frac{25}{2} - 7x - 5x^2 - \frac{7}{6}x^4 + 4x^5$; 15. (i) $17 + \frac{14}{19}x + \frac{13}{2}x^2 + \frac{34}{11}x^4$
 $-2x^5$ (ii) $\frac{2}{9}x - \frac{9}{17}x^2 - \frac{3}{5}x^3 - \frac{3}{2}x^4$ (iii) $-\frac{3}{2} - 4x - \frac{10}{11}x^2 +$
 $4x^4$ (iv) $\frac{2}{5} - \frac{4}{3}x - x^2 - \frac{23}{4}x^5$; 16. $-8 - \frac{1}{2}x^2 + 12x^3 - 3x^4$;
17. $29 + \frac{34}{5}x - 10x^2 - \frac{11}{7}x^4$; 18. (i) $-9 + 6x - \frac{9}{13}x^2 + \frac{15}{11}x^5$
(ii) $-1 + 4x + \frac{10}{9}x^2 - \frac{11}{13}x^3 + \frac{19}{11}x^5$; 19. $-1 + \frac{8}{5}x - x^2 + \frac{27}{13}x^4 -$
 $\frac{3}{2}x^5$; 20. $-\frac{3}{8} + \frac{7}{8}x^2 - 2x^3 + \frac{8}{19}x^4 - x^5$; 21. (i) $\frac{5}{2}, \frac{31}{2}, \frac{43}{2}$
(ii) 8, -4 (iii) $\frac{2}{5}$, 162, 262 (iv) $\frac{13}{4}$; 22. 225; 23. (i) -64 (ii) $\frac{11}{12}$
(iii) $-\frac{56}{5}$ (iv) -2 (v) $\frac{2}{3}$ (vi) 2; 24. $-\frac{2}{33}$; 25. 1; 26. $-\frac{5}{2}$; 27. 1; 28. 3;
29. 5; 30. 2; 31. 4; 32. 6; 33. 6; 34. 2; 35. $\frac{15}{2}$; 36. -1; 37. -42;

38. $\frac{2}{3}$; 39. $\frac{51}{53}$; 40. $\frac{1}{2}$; 41. 2 ; 42. 4, 10, 45 ; 43. 50° , 70° ; 44. $\frac{5}{8}$;
 45. 4 सेंमी०, 6 सेंमी० ; 46. 1350 रु० 5% पर, 3000 रु० 6% पर ; 47. 1.5 हैक्टेअर ;
 48. 19.90 रु० ; 49. 6 वर्ष, 30 वर्ष ; 50. (i) $\frac{133}{25}$ (ii) $\frac{25}{4}$ (iii) $\frac{5867}{100}$ (iv) $\frac{1}{4000}$
 (v) $\frac{20053}{1000}$; 51. (i) 6 (ii) $\frac{203}{9}$ (iii) $\frac{22}{9}$ (iv) $\frac{7}{1125}$ (v) $\frac{1241}{9900}$ (vi) $\frac{12389}{495}$;
 52. (i) और (iii) ; 53. (i) असत्य (ii) सत्य (iii) असत्य (iv) सत्य (v) असत्य (vi) असत्य (vii) असत्य
 (viii) सत्य ; 54. (i), (ii) और (iv) ; 55. नहीं ; 56. नहीं ; 57. (ii) और (iii) ; 59. (i) 0, 1,
 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (ii) 0, 1 ; 60. (i) $z < -\frac{1}{6}$ (ii) $x \leq \frac{8}{5}$ (iii) $x \leq \frac{1}{8}$
 (iv) $y > \frac{1}{8}$ (v) $x \geq \frac{1}{2}$ (vi) $x < \frac{2}{3}$; 61. (i) -1, 0, 1, 2 (ii) 20, 21, 22,
 23, 24, 25

प्रश्नावली 9.1

1. (i) $\frac{3}{2}$, 4 (ii) 2, 6 (iii) $-\frac{5}{4}$, 3 (iv) $\frac{11}{8}$, 2 (v) $-\frac{5}{6}$, 20 (vi) $\frac{7}{5}$, 1
 (vii) $\frac{132}{143}$, 0 ; 2. (i) 2^8 (ii) $\left(-\frac{8}{5}\right)^3$ (iii) $\left(\frac{21}{11}\right)^6$ (iv) $\left(\frac{1}{5}\right)^1$ (v) $(2.07)^4$
 (vi) $(-5.5)^8$ (vii) $(37)^4$ (viii) $\left(\frac{21}{4}\right)^1$; 4. (i) $\frac{16}{9}$ (ii) $\frac{49}{64}$ (iii) $\frac{81}{16}$ (iv) 64
 (v) $-\frac{125}{64}$ (vi) $\frac{121}{64}$ (vii) -2187 (viii) 1 (ix) 1 (x) 15.625 (xi) 2.8561 (xii) 0

प्रश्नावली 9.2

2. (ii), (iii), (v) और (vi) ; 3. (i) 243 (ii) -10000000000000 (iii) $\frac{243}{1024}$
 (iv) $\frac{4096}{15625}$ (v) $\frac{125}{343}$ (vi) 2.0736 ; 4. 5 ; 5. 8

प्रश्नावली 9.3

2. (iii) और (vi) ; 3. (i) $\frac{1}{27}$ (ii) 4 (iii) 81 (iv) 64 (v) 54 (vi) 81 (vii) 100

(viii) 32 (ix) $\frac{1}{8}$ (x) $\frac{1}{125}$ (xi) 27 (xii) $\frac{1}{8}$ (xiii) $-\frac{2}{9}$; 4. (i) 1 (ii) 3

प्रश्नावली 9.4

1. (i) 4096 (ii) $\frac{16}{2401}$ (iii) 4096 (iv) 729 (v) $\left(\frac{4}{5}\right)^{18}$ (vi) $(-9)^{30}$; 2. 23 ;
3. (i) 5^{20} (ii) 8^{28} (iii) $(0.1)^4$ (iv) $(2.2)^4$ (v) $\left(\frac{1}{2}\right)^{35}$ (vi) 7^{48} (vii) 5^{20} (viii) 9^6
(ix) 1 ; 4. 2 ; 5. 6

प्रश्नावली 10.1

1. x^{11} ; 2. y^8 ; 3. a^3 ; 4. a^{20} ; 5. $\frac{2}{3} x^{10}$; 6. $-\frac{10}{77} y^{18}$; 7. $\frac{3}{8} y^9$; 8. $5 b^4$;
9. $12 a^{14}$; 10. $-48 x^5$; 11. $6 d^{10}$; 12. $6 a^3 + 3 a$; 13. $\frac{3}{2} y^5 - 2 y^4$;
14. $a^4 + 8 a^3$; 15. $-\frac{3}{2} y^6 - y^4$; 16. $18y^4 - 12y^3$; 17. $-12 d^4 + 10 d^7$;
18. $14 x^3 + 13 x - 12$; 19. $\frac{1}{4} x^2 - \frac{9}{16}$; 20. $4x^2 - 2ax - 2bx + ab$;
21. $x^2 + 14x + 49$; 22. $9x^2 - 6x + 1$; 23. $\frac{1}{4} x^2 - 4x + 16$; 24. $x^2 + 3x + \frac{9}{4}$; 25. $25x^2 - 9$; 26. $3x^2 + 7x + 2$; 27. $x^4 + 2x^3 + x^2$; 28. $y^2 + y^3 + \frac{y^4}{4}$;
29. $x^2 - \frac{13}{3} x - \frac{10}{3}$; 30. $\frac{x^3}{6} + \frac{5}{6} x^2 + x$

प्रश्नावली 10.2

1. $y^4 + 8y^3 - 4y^2$; 2. $-b^5 - \frac{1}{4} b^4 + \frac{3}{8} b^6$; 3. $15x^4 - 21x^3 + 6x^2$; 4. $2a^3 - 6a^2 + 10a$; 5. $-6y^3 - 12y^4 + 9y^2 - 6y^5$; 6. $\frac{1}{64} x^3 + \frac{1}{8} x^2 + x$;

7. $-7y^5+21y^4-7y^3-42y^2$; 8. $-20p^6+12p^5-8p^4$; 9. $-5a^5+3a^6-a^4-3a^3$; 10. $-21a^5-15a^3+3a^4+3a^6-3a^7$; 11. x^7 ; 12. $-15b^4$; 13. $12p^6$; 14. $-12c^3+12c^4+15c^5$; 15. $x^3+18x^2+8x-x^7-28$

प्रश्नावली 10.3

1. $x^3+4xy+4y^2$; 2. $9y^2-12y+4$; 3. $4x^4-4x^2y^2+y^4$; 4. $81r^2+36rs+4s^2$; 5. $25y^6+40y^3+16$; 6. $9m^2+42mn^2+49n^4$; 7. $a^4+\frac{4}{3}a^2b+\frac{4}{9}b^2$; 8. $100p^2-60pq+9q^2$; 9. $\frac{1}{16}m^6+\frac{1}{2}m^3n^2+n^4$; 10. $\frac{9}{4}z^4-\frac{6}{5}z^2y+\frac{4}{25}y^2$; 11. $x^2y^4-6xy^2+9$; 12. $64w^2-112wz+49z^2$; 13. $9-4x^2$; 14. $\frac{1}{9}y^3-\frac{1}{4}x^2$; 15. $\frac{9a^2}{b^2}-\frac{16x^2}{y^2}$; 16. $16m^2-49n^2$; 17. $16x^2-25y^4$; 18. $\frac{1}{9}y^2-\frac{1}{4}x^6$; 19. $9a^4-25b^6$; 20. $\frac{9}{4}x^6-y^4$; 21. $16b^4-9c^2$; 22. $x^4+5x^2y+6y^2$; 23. $2y^2-y-10$; 24. $30x^2+17x-35$; 25. $\frac{2}{5x^2}+\frac{233}{225x}+\frac{2}{3}$; 26. $-6y^4-y^2z+2z^2$; 27. $10x^4+3x^2-18$; 28. $a^6-4a^3b-12b^4$; 29. $4x^2+y^2+4-4xy-8x+4y$; 30. $x^2+4y^2+z^2+4xy-2xz-4yz$; 31. $a^4+a^2+1-2a^3+2a^2-2a$; 32. $m^2+4n^2+9-4mn+6m-12n$; 33. $9y^4+10y^2+1-12y^3-4y$; 34. $y^4+9y^2+25-6y^3+10y^2-30y$; 35. $x^2-2xy+y^2-1$; 36. $a^2+2ab+b^2-9$; 37. $1-4x^2+4xy-y^2$; 38. $x^2+2xy+y^2-z^2-2z-1$; 39. $-4x^2+9y^2$; 40. $4x^2+12xy+9y^2-12x-18y+8$; 41. $9z^4-12z^2y^2+4y^4-x^2$; 42. a^4+3a^2+4 ; 43. $x^4+x^2-x^6+4x^3-1$; 44. $15x^2+15y^2+30xy-16x-16y-15$; 45. $4y^4+c^4$; 46. 1002001; 47. 3721; 48. 9801; 49. $\frac{2601}{1024}$; 50. 140; 51. 1680; 52. 96; 53. 1599; 54. 899; 55. 2491; 56. $\frac{15}{56}$; 57. 83; 58. 637

प्रश्नावली 10.4

1. $2x^3(1-2x^2)$; 2. $x^3(x-3)$; 3. $-2y(2y^3-1)$; 4. $x(8x^2+5+3x)$;
5. $x(x^2+x+3)$; 6. $(y+2)(4-b)$; 7. $5x^2(3x^3+2-x)$; 8. $y(2a+1+b^2)$;
9. $x^2(7x-5a-x^2)$; 10. $(1-b)(3a+2c)$; 11. $(4x-3)(4x+3)$;
12. $(a+3b)(a-3b)$; 13. $4(1+3x)(1-3x)$; 14. $a^2(3+2y)(3-2y)$;
15. $(x^3+y^3)(x+y)(x-y)$; 16. $(a^2+9)(a+3)(a-3)$; 17. $(x^3+6y^3)(x^3-6y^3)$;
18. $(pqx+2rs)(pqx-2rs)$; 19. $y^3\left(\frac{1}{3}x+\frac{3}{5}z\right)\left(\frac{1}{3}x-\frac{3}{5}z\right)$;
20. $\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}z\right)\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{4}z\right)$; 21. $(3x-2y+4z)(3x-2y-4z)$;
22. $(2x+y+3z)(2x-y-3z)$; 23. $(4a+3b-c)(4a-3b+c)$;
24. $(3m+2n)^3$; 25. $(z+1)^3$; 26. $(y-5)^3$; 27. $(2a-1)^3$; 28. $\frac{1}{4}(x+2)^3$ या
- $\left(\frac{1}{2}x+1\right)^3$; 29. $\left(\frac{1}{5}y-2\right)^3$; 30. $(a^3-2b^3)^2$; 31. $(x+2y)^3(x-2y)^3$;
32. $3(a-3b)^3$; 33. $2a(y-6)^3$; 34. $(5a+14b)^3$; 35. $(m+3n-7)^3$;
36. $(5x+3y-2)^3$; 37. $(a^3-4b^3+9)(a^3-4b^3-9)$; 38. $(7+x-3y)(7-x+3y)$;
39. $(x+4y+3z)(x+4y-3z)$; 40. $(2x-2y+3z)(2x+2y-3z)$

विविध प्रश्नावली III

(एकक IX और X पर)

1. (i) $\frac{2}{3}$, 3 (ii) $-\frac{3}{8}$, 2 (iii) 5, 5 (iv) 19, 6 (v) $-\frac{20}{21}$, 1; 2. (i) 4^4 (ii) $\left(\frac{6}{13}\right)^8$
- (iii) $(-2.3)^5$ (iv) $(59)^3$ (v) $\left(\frac{3}{13}\right)^4$; 6. (i) 256 (ii) $\frac{27}{125}$; 7. (i), (iv), (v) और
- (vii); 8. (i) 729 (ii) -216 (iii) 16 (iv) -3 (v) 625 (vi) $\frac{1}{3}$ (vii) 729 (viii) 1;

9. (i) x^5 (ii) x^6 (iii) x^0 (iv) x^{17} (v) $4y^6$ (vi) $\frac{81}{25}y^0$ (vii) $15x^4$; 10. 4 ; 11. 3 ;
 12. 2 ; 13. 1 ; 14. 7 ; 15. (i) $-\frac{5}{6}x^2+x-\frac{5}{4}$ (ii) $6x^4-x^3$ (iii) $-21y^3$
 $+42y^5-35y^2+56y^6$ (iv) $-18a^5+24a^6-6a^4+3a^3$; 16. (i) $15y^5-3y^6$
 $+15y^3+10y^4$ (ii) $-2x^4-3x^3+2x^2+5x^7-3x+6-x^5$ (iii) $17-4y+15y^3$
 $+5y^3-10y^4$ (iv) $5+2y-2y^3-24y^4$; 17. (i) $48xy$ (ii) $10xy$ (iii) $12z^3y^3$
 (iv) $49y^3$ (v) a^4b^4, c^4d^4 (vi) 3 b, a (vii) $2x, 2x$; 18. (i) $9y^2-24yz+16z^2$
 (ii) $25x^4+60x^2y^2+36y^4$ (iii) $\frac{1}{4}m^4n^3-m^3n+m^2$ (iv) $4x^2-25$ (v) $\frac{1}{25}y^4$
 $-z^4$ (vi) $8x^3+14x-15$ (vii) $15x^4+2x^3y-y^3$ (viii) $2y^6-5x^2y^3-3x^4$
 (ix) $8a^4b^4+14a^3b^3-15a^2b^2$ (x) $4x^3+25y^3+4-20xy-8x+20y$ (xi) y^4
 $+11y^3+1-6y^3-6y$ (xii) $9a^3+16b^3+1+24ab-6a-8b$ (xiii) $4a^3$
 $-12ab+9b^3-4$ (xiv) $a^3-6ab+9b^3+2a-6b-15$ (xv) $x^4-4x^3+2x^2+4x$
 -3 (xvi) $4x^3-25y^3+30y-9$; 19. (i) 998001 (ii) 6561 (iii) 1260
 (iv) 29600 (v) 20 (vi) 4891 (vii) 1596 ; 20. 465 ; 21. 10752 ;
 22. (i) $x(3x+5+8x^2)$ (ii) $5x^2(-x+3x^2+2)$ (iii) $7x^2(x+7)$ (iv) $3(3y+2z)(2-a)$
 (v) $5x(2-a)(1-3x)$; 23. (i) $(4xy+5)(4xy-5)$ (ii) $(5ab+6cd)(5ab-6cd)$
 (iii) $\frac{1}{225}(12x+35y)(12x-35y)$ (iv) $\frac{1}{36}(x+4z)(x-4z)$ (v) $5(x+y)(x-5y)$
 (vi) $(a^2b^3-9c^3d^2+2mn)(a^2b^3-9c^3d^2-2mn)$; 25. (i) $(x+2)^3$ (ii) $(2x-5)^3$
 (iii) $(3x-7)^3$ (iv) $(x-6)^3$ (v) $2(xy+2)^3$ (vi) $(pq-xy)^3$ (vii) $\frac{1}{36}(3x-10)^3$;
 26. (i) $4(2x^3+3y^3)^2$ (ii) $(2m+3)^2(2m-3)^2$ (iii) $(2x-5y+3)^2$
 (iv) $(2x-3y+2xy)(2x-3y-2xy)$ (v) $(4a+3x-2y)(4a-3x+2y)$
 (vi) $(a^2+4b^3)(a+2b)(a-2b)$

प्रश्नावली 11.1

1. (i) $-\frac{35}{9}^{\circ}\text{C}$ (ii) 0°C (iii) -40°C (iv) $\frac{20}{9}^{\circ}\text{C}$ (v) $\frac{215}{9}^{\circ}\text{C}$ (vi) 100°C
 (vii) 15°C (viii) $-\frac{160}{9}^{\circ}\text{C}$; 2. (i) $\frac{484}{5}^{\circ}\text{F}$ (ii) 14°F (iii) 86°F (iv) $\frac{448}{5}^{\circ}\text{F}$
 (v) -103°F (vi) $-\frac{124}{5}^{\circ}\text{F}$

प्रश्नावली 11.2

1. 0.6 मी०/घंटा; 2. 4 घंटे 20 मिनट; 3. 221 कि० मी०; 4. (i) 24 कि०मी० (ii) 5 घंटे 15 मिनट (iii) 62 घंटे 30 मिनट (iv) 21.87 मी०/घंटा (v) 300 कि० मी०/घंटा

प्रश्नावली 11.3

1. (क) 128 मीटर (ख) 1164.80 रु०; 2. (क) 24 घन सें०मी० (ख) 0.25 सें०मी० (ग) 64 घन सें०मी०; 3. (क) 30 वर्ग सें०मी० (ख) 2611.20 रु० (ग) 18.2 मी०; 4. (क) 90.25 (ख) 132.25 (ग) 5625 (घ) 600.25; 5. (क) 210 (ख) 5050; 6. (क) 301.84 वर्ग मी० (ख) 154 वर्ग सें० मी०; 7. (क) 44 सें० मी० (ख) 61.6 मी०, 197.12 रु० (ग) 15 चक्कर

पारिभाषिक शब्दावली

अंक	digit
अंकगणित	arithmetic
अंतर	difference
अंतराल	interval
अंश	degree/numerator
अक्षर गुणनखंड	literal factors
अक्षर संख्याएं	literal numbers
अज्ञात	unknown
अणु	molecule
अद्वितीय	unique
अधोप्रवाह	down stream
अनुपात	ratio
अनुप्रयोग	applications
अभाज्य गुणनखंड	prime factorization
अभिप्रेरण	motivation
अवरोही क्रम	decreasing order
असमान	unequal
असमान पद	unlike terms
असमिका	inequality
असमिका संकेत	inequality symbol
असमीकरण	inequation
असंत आवर्ती	non-terminating repeating या non-terminating recurring

आकृति	figure
आधार	base
आयत	rectangle
आयतन	volume
आरोही-क्रम	increasing order
आसन्न परवर्ती	immediate successor
इकाई का स्थान	units place
उपपत्ति	proof
उपविभाजित	subdivide
उभयनिष्ठ	common
ऊँचाई	height
ऊर्ध्वप्रवाह	upstream
ऋण	minus
ऋणात्मक	negative
एकक/मात्रक	unit
एकक भिन्न	unit fraction
एकपदी	monomial
औसत	average
औसत की विधि	method of average
किनारा	edge
केन्द्र	centre
कोण	angle
कोषाणु	cell
क्रमविनिमेय	commutative
क्रम-सम्बन्ध	ordering
बबलनांक	boiling point
क्षेत्रफल	area
खगोलज्ञ	astronomer

गणन	counting
गणन संख्याएँ	counting numbers
गणित	mathematics
गुणज	multiple
गुणन	multiplication
गुणनखंड	factor
गुणनखंडन	factorization/factoring
गुणनफल	product
गुणन सारणी	multiplication table
गुणनात्मक प्रतिलोम	multiplicative inverse
गुणांक	coefficient
घन	cube
घनाभ	cuboid
घात	power
घातांक	exponent/index
घातांकीय संकेतन	exponential notation
चर	variable
चाप	arc
चिन्ह	sign/mark
चौड़ाई	breadth/width
जूल	joule
तत्समक अवयव	identity element
तरंगदैर्घ्य	wavelength
तापमान	temperature
तुला	balance
त्रिज्या	radius
त्रिपद	trinomial
त्रिभुज	triangle
दक्षिण पक्ष	right hand side

दशमलव	decimal
दशमलव निरूपण	decimal representation
दहाई का स्थान	tens place
दिशा	direction
द्वादश आधार वाली भिन्न	duodecimal fraction
द्विपद	binomial
घनपूर्णांक	natural number
निम्नतम पद में	in lowest terms
निरपेक्ष मान	absolute value
निरूपण	representation
न्यूनकोण	acute angle
पक्ष	side
पग/चरण	step
पद	term
पद का गुणांक	coefficient of the term
परमाणु	atom
परवर्ती	successor
परिधि	circumference
परिमाप	perimeter
परिमित	finite
परिमेय भिन्न	rational fraction
परिमेय संख्या	rational number
पुनर्व्यवस्थितिकरण गुण	rearrangement property
पूर्णतया गुणनखंडित	completely factored
पूर्ण वर्ग त्रिपद	perfect square trinomial
पूर्ण संख्या	whole number
पूर्णांक	integer
पूर्णांक मान	integer value
प्रतिबन्धित समीकरण	conditional equation

प्रतिरूप	pattern
प्रतिलोम	inverse
प्रतिस्थापन	substitution
प्रसारित संकेतन	expanded notation
बराबर/समान	equal
बहुपद	polynomial
बहुफलक	polyhedron
बार बार योग	repeated addition
बिंदु	point
बीच	between
बीजगणित	algebra
बीजीय व्यंजक	algebraic expression
ब्याज	interest
भागफल	quotient
भार	weight
भिन्न	fraction/distinct
मध्य-बिंदु	mid-point
मापन	measure/measurement
मुख्य विकर्ण	main diagonal
मूल	root/original
योग	addition/sum
योज्य प्रतिलोम	additive inverse
रिक्त	empty/blank
रेखाखंड	line-segment
लम्बाई	length
सम्बन्धी विभाजन विधि	long division method
लाभ	profit
वज्र गुणन	cross multiplication
वर्ग	square

वाम पक्ष	left hand side
वार्षिक	annual
वितरणात्मक	distributive
विपरीत चिन्ह	opposite signs
विभाजन	division
वृत्त	circle
व्यवकलन	subtraction
व्यास	diameter
व्युत्क्रम	reciprocal
शब्द समस्याएँ या प्रश्न	word problems
शून्य	zero
शून्य का योज्य गुण	addition property of zero
शून्येतर	non-zero
शेष	remainder
संकल्पना	concept
संक्रामिता	transitivity
संक्रिया	operation
संकेतन	notation
संख्यांक	numeral
संख्या रेखा	number line
संख्यात्मक गुणनखंड	numerical factor
संतुष्ट	satisfy
संयोग	combination
समता संकेत	equality symbol
सममित	symmetrical
समांतर	parallel
समान चिन्ह	like signs
समान पद	like terms
समिका	equality

समीकरण

समुच्चय

समूहन संकेत

सम्मुख

सहचारी

सांत

साधारण व्याज

साहचर्य गुण

सूत्र

सेक्सजिसेमल

स्तम्भ

स्तम्भानुसार

स्थानापन्न

स्थानीय मान

स्थानीय मान का सिद्धांत

हर

हल

equation

set

grouping symbols

opposite

associative

terminating

simple interest

associative property

formula

sexagesimal

column

columnar

transpose

place value

place value principle

denominator

solution

